Serie 2

Hinweis: Mit einem Stern ($*$) gekennzeichnete Aufgaben sind schwierig und zum Knobeln gedacht.

1. Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen X und Y.
   (a) Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn für alle abgeschlossenen Teilmengen $A \subseteq Y$ auch $f^{-1}(A) \subseteq X$ abgeschlossen ist.
   (b) Sei $f\colon X \to Y$ stetig. Zeigen Sie, dass für Teilmengen $X_0 \subseteq X$ und $Y_0 \subseteq Y$ mit $f(X_0) \subseteq Y_0$ auch die Einschränkung
   $$f|_{X_0}^{Y_0}\colon X_0 \to Y_0, \quad x \mapsto f(x),$$
   stetig ist. Hierbei werden X_0 und Y_0 mit der Teilraumtopologie betrachtet.
   (c) Sei $\mathcal{B}$ eine Basis für die Topologie von Y. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn $f^{-1}(V) \subseteq X$ offen ist für alle Mengen $V \in \mathcal{B}$. Es gilt eine äquivalente Aussage, wenn „Basis“ durch „Subbasis“ ersetzt wird.

2. Zeigen Sie, dass die folgenden topologischen Räume jeweils homöomorph sind.
   (a) Das Intervall $[0, 1]$ und das Intervall $[2, 5]$.
   (b) Das Intervall $(-1, 1)$ und $\mathbb{R}$.
   (c) Die abgeschlossene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{R}^2$ und das abgeschlossene Quadrat $[-1, 1] \times [-1, 1]$ in $\mathbb{R}^2$.

3. Welche Teilmengen von $\mathbb{Q}$ (betrachtet mit der induzierten Topologie von $\mathbb{R}$) sind zusammenhängend?

4. Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie: X ist nicht zusammenhängend genau dann, wenn es eine stetige, surjektive Abbildung von X nach $\{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie gibt.

5. Seien X, Y und Z nichtleere topologische Räume.
   (a) Sei $f\colon Z \to X \times Y$, $z \mapsto (f_X(z), f_Y(z))$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn $f_X\colon Z \to X$ und $f_Y\colon Z \to Y$ stetig sind.
   (b) Zeigen Sie, dass X und Y genau dann wegzusammenhängend sind, wenn $X \times Y$ wegzusammenhängend ist.

6. Sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass es für jede Menge von Teilmengen $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ genau eine Topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ auf X gibt, sodass $\mathcal{S}$ eine Subbasis von $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ ist.

   Zeigen Sie weiter, dass dies die kleinste (auch gröbste genannt) Topologie von X ist, die $\mathcal{S}$ enthält, d.h. ist $\mathcal{O}$ eine Topologie von X mit $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}$, dann gilt $\mathcal{O}_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{O}$.

7. Sei $(X, \mathcal{O}_{\text{cofin}})$ ein topologischer Raum mit der kofiniten Topologie.
   (a) Wann ist X zusammenhängend?
   (b) Nehmen Sie an, X habe die Kardinalität von $\mathbb{R}$ (oder grösser). Zeigen Sie, dass X wegzusammenhängend ist.
   (c) Nehmen Sie an, X habe abzählbar unendlich viele Elemente. Zeigen Sie, dass X nicht wegzusammenhängend ist. ($*$)