Serie 3

1. Zeigen Sie, dass der Grenzwert einer Folge in einem Hausdorffraum, sofern er existiert, eindeutig ist.

2. Sei $(X, \mathcal{O}_{\text{cofin}})$ ein topologischer Raum mit der kofiniten Topologie.
   (a) Zeigen Sie, dass X das Axiom T_1 erfüllt, d.h. für zwei verschiedene Punkte $a \neq b$ in X existieren offene Umgebungen von a und b, welche den jeweils anderen Punkt nicht enthalten.
   (b) Wann ist X ein Hausdorffraum?
   (c) Zeigen Sie, dass ein beliebiger topologischer Raum X genau dann das Axiom T_1 erfüllt, wenn alle einelementigen Teilmengen von X abgeschlossen sind.

3. Sei X eine Menge.
   (a) Was sind die kompakten Mengen in X mit der diskreten Topologie?
   (b) Was sind die kompakten Mengen in X mit der kofiniten Topologie?

4. (Zusammenhangskomponenten) Sei X ein topologischer Raum und sei $x_0 \in X$.
   (a) Die Menge
   $$\{x \in X \mid \exists A \subseteq X \text{ zusammenhängend mit } x_0, x \in A\}$$
   heißt *Zusammenhangskomponente* von x_0. Zeigen Sie, dass dies die größte zusammenhängende Teilmenge von X ist, welche x_0 enthält, und weiter, dass dies eine abgeschlossene Teilmenge von X ist.
   (b) Die Menge
   $$\{x \in X \mid \text{ es gibt einen Weg von } x \text{ nach } x_0\}$$
   heißt *Wegzusammenhangskomponente* von x_0. Zeigen Sie, dass dies die größte wegzusammenhängende Teilmenge von X ist, welche x_0 enthält.
   (c) Was sind die Zusammenhangskomponenten und Wegzusammenhangskomponenten in $\mathbb{Q}$?
   (d) Finden Sie ein Beispiel eines topologischen Raums mit einer Wegzusammenhangskomponente, die nicht abgeschlossen ist.

5. Seien X und Y nichtleere topologische Räume.
   (a) Zeigen Sie, dass X und Y genau dann zusammenhängend sind, wenn $X \times Y$ zusammenhängend ist.
   (b) Zeigen Sie, dass X und Y genau dann kompakt sind, wenn $X \times Y$ kompakt ist.

6. Die *Cantor-Menge* $C \subseteq \mathbb{R}$ ist wie folgt definiert. Sei
   $$C_1 := [0,1] \quad \text{und} \quad C_n := \frac{1}{3}C_{n-1} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{n-1}\right).$$
   Nachfolgend sind C_1 bis C_7 abgebildet.

Dann ist die Cantor-Menge definiert durch

$$C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Cantor-Menge abgeschlossen ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Cantor-Menge überabzählbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Zusammenhangskomponenten von C jeweils nur aus einem Punkt bestehen.