Serie 4

1. Seien X ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $\pi\colon X \to X/\sim$, $x \mapsto [x]$. Zeigen Sie:
   (a) Die Quotiententopologie
   $$\mathcal{O}_{X/\sim} := \left\{ U \subseteq X/\sim \mid \pi^{-1}(U) \text{ ist offen in } X \right\}$$
   ist eine Topologie auf $X/\sim$.
   (b) Die Abbildung π ist stetig.
   (c) $\mathcal{O}_{X/\sim}$ ist die größte (auch *feinste* genannt) Topologie auf $X/\sim$, sodass π stetig ist, d.h. falls $\mathcal{O}$ eine Topologie auf $X/\sim$ ist, sodass π stetig ist, dann gilt $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{X/\sim}$.

2. Für $n \in \mathbb{N}$, sei $\mathbb{D}^n = \{v \in \mathbb{R}^n \mid |v| \leq 1\}$ mit der Euklidischen Topologie ausgestattet. Wir betrachten die Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben durch
   $$v \sim w :\Leftrightarrow v = w \text{ oder } |v| = |w| = 1.$$
   Finden Sie einen zu $\mathbb{D}^n/\sim$ homöomorphen Teilraum eines $\mathbb{R}^m$.

3. (Der Torus) Zeigen Sie, dass der topologische Produktraum $X_1 = S^1 \times S^1$ homöomorph zum Quotientenraum $X_2 = Q/\sim$ ist, den man erhält, wenn man auf $Q = [0,1] \times [0,1]$ die Äquivalenzrelation $(s,0) \sim (s,1)$ für alle $s \in [0,1]$ und $(0,t) \sim (1,t)$ für alle $t \in [0,1]$ betrachtet. Dies sind zwei mögliche (äquivalente) Definitionen des Torus T^2.

4. (Der reelle projektive Raum) Zeigen Sie, dass die unten definierten topologischen Räume X_1, X_2 und X_3 homöomorph sind. Dies sind drei mögliche (äquivalente) Definitionen des projektiven Raums $\mathbb{RP}^2$.
   (a) Sei $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ die zweidimensionale Einheitssphäre. Wir betrachten auf S^2 die Äquivalenzrelation $\sim$, die die Antipoden auf S^2 identifiziert, d.h. $u \sim v :\Leftrightarrow u = v$ oder $u = -v$. Dann ist der topologische Raum X_1 definiert als der Quotientenraum $X_1 := S^2/\sim$.
   (b) Wir betrachten die zweidimensionale Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ und die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{D}^2$, die die Antipoden auf ihrem Rand identifiziert, d.h. $u \sim v :\Leftrightarrow u = v$ oder $u = -v$ für $u, v \in \partial\mathbb{D}^2$. Der topologische Raum X_2 ist dann der Quotientenraum $X_2 := \mathbb{D}^2/\sim$.
   (c) Sei $\mathcal{L}$ die Menge der Geraden in $\mathbb{R}^3$, die durch den Ursprung gehen. Für $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ sei $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ der Winkel zwischen L_1 und L_2 und wir definieren $d(L_1, L_2) := \alpha$. Dann definieren wir den topologischen Raum X_3 als $\mathcal{L}$ mit der durch d induzierten Topologie.

5. Sei X ein topologischer Raum und sei $\Delta := \{(x,y) \in X \times X \mid x = y\}$ die Diagonale von $X \times X$.
   (a) Zeigen Sie, dass X genau dann ein Hausdorffraum ist, wenn Δ in $X \times X$ abgeschlossen ist.
   (b) Sei $\sim$ eine beliebige Äquivalenzrelation auf X und definiere $R := \{(x,y) \in X \times X \mid x \sim y\}$. Angenommen, $\pi\colon X \to X/\sim$ ist *offen*, d.h. das Bild $\pi(U)$ einer jeden offenen Menge $U \subseteq X$ ist offen in $X/\sim$. Zeigen Sie, dass $X/\sim$ genau dann ein Hausdorffraum ist, wenn R in $X \times X$ abgeschlossen ist.
   (c) Sei G eine topologische Gruppe und H eine Untergruppe. Zeigen Sie, dass $\pi\colon G \to G/H, g \mapsto gH$ offen ist.

6. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und sei ∞ ein abstraktes Symbol, welches nicht in X enthalten ist. Wir definieren die *Einpunktkompaktifizierung* (auch *Alexandroff-Kompaktifizierung* genannt) $\widehat{X}$ von X als die Menge $X \cup \{\infty\}$ mit der Topologie
   $$\mathcal{O}_{\widehat{X}} := \mathcal{O}_X \cup \{\{\infty\} \cup (X \setminus K) \mid K \subseteq X \text{ kompakt und abgeschlossen}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\widehat{X}$ ein kompakter topologischer Raum ist.

(b) Finden Sie für die Einpunktkompaktifizierung $\widehat{X}$ folgender topologischer Räume einen Teilraum eines $\mathbb{R}^m$, zu dem sie homöomorph sind:

  (i) $X = [0, 1)$
  (ii) $X = (0, 1)$
  (iii) $X = [0, 1]$
  (iv) $X = \mathbb{R}^n$