Serie 6

Hinweis: Mit einem Stern $(*)$ gekennzeichnete Aufgaben sind besonders schwierig.

1.

Lemma (Verklebungslemma)**.** *Seien X und Y topologische Räume und sei $X = A \cup B$ eine Überdeckung von X mit abgeschlossenen Mengen $A, B \subseteq X$. Weiter seien $f\colon A \to Y$ und $g\colon B \to Y$ stetige Abbildungen mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A \cap B$ und sei $h\colon X \to Y$ definiert durch*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \textit{falls } x \in A, \\ g(x), & \textit{falls } x \in B. \end{cases}$$

Dann h ist eine wohldefinierte stetige Abbildung.

Bemerkung: Diese Aussage lässt sich verallgemeinern für eine Überdeckung von X mit endlich vielen abgeschlossenen Mengen, aber auch für eine beliebige Überdeckung von X mit offenen Mengen.

(a) Zeigen Sie das Verklebungslemma.

(b) Sei X ein topologischer Raum und seien γ_0 und γ_1 zwei Wege in X mit $\gamma_0(1) = \gamma_1(0)$. Zeigen Sie, dass dann der Weg $\gamma_0\gamma_1$ stetig ist.

(c) Sei X ein topologischer Raum und seien $x, y, z \in X$. Seien γ_0 und γ_0' zwei Wege in X von x nach y und γ_1 und γ_1' zwei Wege in X von y nach z. Zeigen Sie, dass falls $\gamma_0 \simeq \gamma_0'$ und $\gamma_1 \simeq \gamma_1'$ rel Endpunkte gilt, so gilt auch $\gamma_0\gamma_1 \simeq \gamma_0'\gamma_1'$ rel Endpunkte.

2. Zeigen Sie, dass $\{5\} \subset \mathbb{Q}$ ein Retrakt von $\mathbb{Q}$ ist, aber kein Deformationsretrakt.

3. Betrachten Sie alle möglichen Topologien auf der zweielementigen Menge $\{a, b\}$. Welche dieser topologischen Räume sind kontrahierbar?

4. Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $\mathrm{id}_{S^n}, p\colon S^n \to S^n$ die stetigen Abbildungen gegeben durch $\mathrm{id}_{S^n}(v) = v$ und $p(v) = -v$.

(a) Zeigen Sie für $n = 1$, dass p homotop zu id_{S^n} ist.

(b) Zeigen Sie für alle ungeraden n, dass p homotop zu id_{S^n} ist.

5. (a) Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X kontrahierbar ist genau dann, wenn für jeden wegzusammenhängenden topologischen Raum Y und jedes Paar von stetigen Funktionen $f, g\colon X \to Y$ gilt, dass f und g homotop sind.

(b) Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum X kontrahierbar ist genau dann, wenn für jeden topologischen Raum Y und jedes Paar stetiger Funktionen $f, g\colon Y \to X$ gilt, dass f und g homotop sind.

6. Seien X und Y homotopieäquivalente Räume.

(a) Zeigen Sie, dass X wegzusammenhängend ist genau dann, wenn Y wegzusammenhängend ist.

(b) Zeigen Sie, dass X zusammenhängend ist genau dann, wenn Y zusammenhängend ist.

(c) Sei $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz. Bezeichne $[z]_Z$ und $[z]_W$ die Zusammenhangs- bzw. die Wegzusammenhangskomponente eines Punktes z in X oder Y. Zeigen Sie, dass $[z]_Z \mapsto [f(z)]_Z$ und $[z]_W \mapsto [f(z)]_W$ Bijektionen zwischen den Zusammenhangskomponenten bzw. den Wegzusammenhangskomponenten von X und Y definieren. $(*)$

7. Zeigen Sie, dass $O_n(\mathbb{R}) \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ ein starker Deformationsretrakt ist. *Hinweis:* Benutzen Sie das Gram-Schmidt-Verfahren.

8. Finden Sie einen kontrahierbaren topologischen Raum X und einen Punkt $x \in X$, so dass $\{x\}$ kein starker Deformationsretrakt von X ist. $(*)$