# Serie 7

**Hinweis:** Mit einem Stern ($*$) gekennzeichnete Aufgaben sind besonders schwierig. Aufgaben mit einem ($A$) kennzeichnen besonders abstrakte Aufgaben (siehe Aufgabe 6).

**Hinweis:** Das nächste Quiz findet am 17.04. in der Übungsstunde statt.

1. Beweisen Sie folgendes Lemma über die Funktorialität der Fundamentalgruppe.

   **Lemma.** *Seien $X$, $Y$ topologische Räume. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Sei $x_0 \in X$ beliebig und $y_0 \in Y$ mit $f(x_0) = y_0$. Dann definiert $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, $[\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$ einen Gruppenhomomorphismus. Des Weiteren gilt:*

   *1.* $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.

   *2. Sei $Z$ ein topologischer Raum, $g : Y \to Z$ stetig und $z_0 \in Z$ mit $z_0 = g(y_0) = g(f(x_0))$. Dann gilt $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, wobei $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, $g_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Z, z_0)$ und $(g \circ f)_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Z, z_0)$.*

2. Sei $A \subseteq X$ ein Retrakt mit Retraktion $\rho\colon X \to A$ und bezeichne $i\colon A \to X$ die Inklusion. Sei $a \in A \subseteq X$.
   (a) Zeigen Sie, dass $i_*\colon \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ injektiv ist und $\rho_*\colon \pi_1(X, a) \to \pi_1(A, a)$ surjektiv ist.
   (b) Angenommen $\rho$ ist ein starker Deformationsretrakt. Zeigen Sie, dass dann $i_*$ und $\rho_*$ zueinder inverse Gruppenisomorphismen sind.

3. (a) Seien $X$ und $Y$ topologische Räume und $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Finden Sie einen (kanonischen) Gruppenisomorphismus zwischen $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ und $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.
   (b) Sei $X = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in X$ beliebig. Bestimmen Sie den Isomorphietyp von $\pi_1(X, x_0)$. *Hinweis: Sie dürfen hier benutzen, dass für $n = 1$, $\pi_1(X, x_0)$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist. Diese Aussage wird in der Vorlesung noch gezeigt.*

4. Sei $\mathcal{E}$ die Kategorie mit Objekten den Euklidischen Räumen $\mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ und Morphismen $\mathrm{Mor}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ den glatten Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$, die den Ursprung auf den Ursprung senden, mit der üblichen Verknüpfung von Funktionen. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $\mathcal{F}$, die jedem $\mathbb{R}^n$ sich selbst und jedem $f \in \mathrm{Mor}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ das Differential $Df(0)$ von $f$ im Ursprung zuordnet, einen kovarianter Funktor von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{E}$ definiert.

5. Sei $\mathcal{U}$ gegeben durch folgendes Tripel von Daten: ($A$)
   - $\mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ ist die Klasse der kleinen Kategorien, d.h.
   $$\mathrm{Ob}(\mathcal{U}) = \{\mathcal{C} \mid \mathcal{C} \text{ ist eine Kategorie, für welche } \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \text{ eine Menge ist}\},$$
   - $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ist die Menge der kovarianten Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$,
   - $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \mathrm{Mor}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ ist durch Nacheinanderausführen von Funktoren gegeben.

   Zeigen Sie, dass $\mathcal{U}$ eine Kategorie bildet.

6. Finden Sie eine stetige Surjektion $S^1 \to S^2$. Können Sie für alle $m, n \in \mathbb{N}$ eine stetige Surjektion $S^m \to S^n$ finden? ($*$)