Serie 8

Hinweis: Mit einem Stern ($*$) gekennzeichnete Aufgaben sind besonders schwierig.

1. Zeigen Sie, dass es keinen Homöomorphismus $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus S^1$ mit $f(0,0) = (2,0)$ gibt.

2. Seien X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$.
   (a) Sei β eine Schleife an x_0. Beschreiben Sie die Abbildung
   $$\Psi_\beta\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0), \quad [\alpha] \mapsto [\beta(\alpha\beta^-)],$$
   (vgl. Eigenschaft i) aus Woche 8) mit Begriffen aus der Gruppentheorie.
   (b) Sei Y ein topologischer Raum, sei $y_0 \in Y$ und seien $f, g\colon X \to Y$ homotope Abbildungen mit $f(x_0) = g(x_0) = y_0$. Was können Sie über $f_*, g_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ aussagen?
   (c) Finden Sie Abbildungen f, g wie in (b), sodass $f_* \neq g_*$ gilt. ($*$)

3. Sei $r > 0$ eine Konstante. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung, sodass $|f(v) - v| \leq r$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$ gilt. Zeigen Sie, dass f surjektiv ist.

4. Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X einfach zusammenhängend ist genau dann, wenn es für alle Paare von Punkten x, y in X eine eindeutige Homotopieklasse (rel Endpunkte) von Pfaden gibt, die diese beiden Punkte verbindet.

5. Sei G eine topologische Gruppe mit neutralem Element e. Zeigen Sie, dass $\pi_1(G, e)$ kommutativ ist.

6. Sei X ein kontrahierbarer topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X einfach zusammenhängend ist. Dies folgt direkt aus der Invarianz der Fundamentalgruppe unter Homotopieäquivalenzen, kann aber in diesem Spezialfall auch direkt gezeigt werden.

<u>Rätsel:</u> Gegeben sei ein Bilderrahmen und ein Faden, der an seinen Enden am Bilderrahmen befestigt ist. In der Wand seien zwei Nägel eingeschlagen. Können Sie den Bilderahmen so an den zwei Nägeln aufhängen, dass er sicher herunterfällt, sobald Sie einen der beiden Nägel aus der Wand ziehen?