Serie 2

Abgabedatum: Fr. 03.03., in den Übungsgruppen

Forum: https://forum.math.ethz.ch/c/spring-23/numerische-methoden-phys/

Webpage: https://metaphor.ethz.ch/x/2023/fs/401-2664-00L/

1. *Konvergenzraten der summierten Quadraturregeln*

Wir wollen die folgende Quadraturregeln *zusammengesetzte Mittelpunktregel*, *zusammengesetzte Trapezregel* und *zusammengesetzte Simpsonregel* verwenden, um das Integral

$$I = \int_0^1 f_i(x) \mathrm{d}x$$

von $f_i(x)$, $i = 1, 2$, auf N Teilintervallen oder mit n Funktionsauswertungen zu berechnen. Die beiden Funktionen sind durch

$$f_1(x) := \frac{1}{1+5x^2} \qquad f_2(x) := \sqrt{x}\,. \tag{1}$$

gebeben.

a) Implementieren Sie die Funktionen $f_i(x)$, $i \in \{1, 2\}$.

b) Implementieren Sie die Funktionen `mittelpunkt(f,a,b,N)`, `trapezoid(f,a,b,N)` und `simpson(f,a,b,N)`. Dabei sollen die Funktion `f`, welche integriert werden soll, die untere und obere Grenze `a` und `b` und die Anzahl `N` der Teilintervalle in der zusammengesetzten Regel eingegeben werden. Jede Funktion soll die Approximation von I ausgeben. *Hinweis:* Sie können das Template `quadrature.py` verwenden. Rufen Sie die zu implementierende Funktion doch gleich auf, dann sehen Sie sofort ob Ihre Implementation plausibel ist.

c) Vervollständigen Sie die Funktion `quadrature_error(quadrature_rule, f, exact)`: Dabei sollen die Quadraturregel `quadrature_rule`, die integrierende Funktion `f` und der genaue Wert Ihres Integrals `exact` eingegeben werden. Die Funktion `quadrature_error` soll den Fehler `error` und die Anzahl der Teilintervalle `n_chunks`$= 2^k$, wobei $k \in \{3, \ldots, 10\}$, ausgeben. **Tipp**: Die Funktion `enumerate` kann nütlich sein.

d) Testen Sie den Code: Zwei Plots sollen generiert werden, die die Konvergenzraten zeigen. Welche Methode verwendet man sinnvollerweise?

e) Ändern Sie den Code, um einen weiteren Plot zu generieren, der die Konvergenz jeder Quadraturregel unter Berechnung des Integrals der Funktion

$$f(x) = x^5(1 - x^4) \tag{2}$$

zeigt.

2. *Homogen geladenes Quadrat in kartesischen Koordinaten*

Betrachten Sie ein quadratisches Gebiet in der x-y-Ebene, welches eine konstante elektrische Ladungsdichte ρ_0 aufweist:

$$\rho(x,y) = \begin{cases} \rho_0, & (x,y) \in [-1,1]^2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das elektrostatische Potential φ an einem Punkt (x_p, y_p) ausserhalb des geladenen Quadrats ist dann durch Integration über die geladene Region gegeben

$$\varphi(x_p, y_p) = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \,.$$

Der Einfachheit halber setzen Sie $\frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} = 1$.

Implementieren Sie die Trapez- und die Simpson-Regel in zwei Dimensionen und berechnen Sie dann $\varphi(x_p, y_p)$ für $x_p = y_p = 2, 10, 20$. Schauen Sie sich den Fehler genau an. Was ist erstaunlich daran? Wie erklären sie sich dieses Verhalten?

Hinweis: Verwenden Sie das Template `potential.py`