

Serie 3

Abgabedatum: Fr. 10.03, in den Übungsgruppen

Forum: <https://forum.math.ethz.ch/c/spring-23/numerische-methoden-phys/>

Webpage: <https://metaphor.ethz.ch/x/2023/fs/401-2664-00L/>

1. Gauss-Legendre Quadratur

a) Verwenden Sie folgende Quadraturregeln

- zusammengesetzte Mittelpunktsregel
- zusammengesetzte Trapezregel
- zusammengesetzte Simpsonregel
- Gauss-Legendre Quadratur
- zusammengesetzte Gauss-Legendre Quadratur

um das Integral

$$I = \int_0^1 f_i(x) dx$$

von $f_i(x)$ auf N Teilintervallen oder mit n Funktionsauswertungen zu berechnen. (Die genauen Werte von N und n stehen im Template.) Die beiden Funktionen sind gegeben durch

$$f_1(x) := \frac{1}{1 + 5x^2} \quad f_2(x) := \sqrt{x}.$$

Berechnen Sie den Fehler und plotten Sie die Konvergenzraten. Welche Methode verwendet man sinnvollerweise?

Hinweis: Verwenden Sie das Template `gauss_legendre.py`

Hinweis: Die Quadraturpunkte und -gewichte können mittels der Funktion `gauss_legendre_rule` in `gauss_legendre_rule.py` berechnet werden.

b) Wie viele Funktionsauswertungen braucht die h -adaptive Strategie von Code 1.4.2 für die beiden Funktionen $f_i(x)$? Plotten Sie die erzeugten Gitter.

Hinweis: Modifizieren Sie den Code so, dass er alle erzeugten Gitter zurück gibt.

Bitte wenden!

2. ★ *Kernaufgabe* ★ *Quadratur*

Aufgabenstellung

Sei

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - a \sin(2\pi t - 1)}}$$

Hinweis: In `kernaufgabe.py` finden Sie ein minimales Template.

- a) Plotten Sie in einem Bild der Fehler der (nicht-zusammengesetzter) Gauss-Quadratur und der zusammengesetzten Trapezregel für die Parameter $a \in \{0.5, 0.9, 0.95, 0.99\}$ gegen der Anzahl Funktionsauswertungen für den Integrationsgebiet $[0, \frac{1}{2}]$ und in einem anderen Bild für den Integrationsgebiet $[0, 1]$.

Hinweis: Sie können den Parameter a als ein weiteres Argument `args=(a,)` an Ihrer Quadraturformel mitgeben, wie im Beispiel der Vorlesung. Für fortgeschrittene Python-Kenner: sie dürfen die Funktion als Klasse mit dem Parameter a definieren.

- b) Erklären Sie den Verlauf jeder Konvergenzkurve. Welche Methode erscheint Ihnen als die besser geeignet, im Licht dieses Experiments?

3. *Lobatto-Quadratur* [*Prüfungsaufgabe 2019*]

Lobatto-Quadraturformeln besitzen die maximale Ordnung unter jenen Quadraturformeln, die die Intervallendpunkte als Knoten haben:

$(b_i, c_i)_{i=1}^s$ mit $c_1 = 0, c_s = 1$ der Ordnung $2s - 2$.

- a) Geben Sie die Lobatto-Quadraturformeln der Ordnungen 2 und 4 an ($s = 2$ und $s = 3$).
- b) Berechnen Sie die Knoten und Gewichte der Lobatto-Quadraturformel der Ordnung 6 ($s = 4$).

Hinweis: Die Berechnung vereinfacht sich, wenn Sie verwenden, dass die gesuchte Quadraturformel symmetrisch ist.

4. *Quadraturformeln* [*Prüfungsaufgabe 2020*]

Sei die Quadraturformel auf $[-1, 1]$ gegeben durch die Knoten und Gewichte der Datei `quadrature_formula.py`.

- a) Welche Ordnung hat diese Quadraturformel? Schreiben Sie ein Programm, mit dem Sie Ihre Antwort begründen.
- b) Zu welcher Klasse von Quadraturformeln gehört diese Quadraturformel? Begründen Sie Ihre Aussage.
- c) Schreiben Sie ein Programm, das eine auf diesen Knoten und Gewichten basierte zusammengesetzte Quadraturformel berechnet. Wenden Sie dies für die Funktionen

$$f_1(x) = \frac{1}{(x^2 + 4)^2}, \quad f_2(x) = 0.03x^{2/3}$$

Siehe nächstes Blatt!

auf dem Intervall $[0, 3]$ an. Plotten Sie die Fehler in doppellogarithmischer Skala. Die exakten Werte der zwei Integrale sind im Template `quadrature_formula.py` gegeben.

Welche Ordnungen beobachten Sie für die zwei Fehler? Plotten Sie auf dem Bild mit den Fehlern die Graphen der Polynome, die diesen zwei beobachteten und der erwarteten Ordnungen entsprechen.

- d) Begründen Sie auf Papier das beobachtete oder erwartete Verhalten der Fehler in den zwei Fällen.