

Serie 4

Abgabedatum: Fr. 17.03, in den Übungsgruppen

Forum: <https://forum.math.ethz.ch/c/spring-23/numerische-methoden-phys/>

Webpage: <https://metaphor.ethz.ch/x/2023/fs/401-2664-00L/>

1. *Trigonometrische Interpolation und Fehlerabschätzungen*

Schreiben Sie einen Python-Code, der die Bilder aus Abschnitt 9.5 “Trigonometrische Interpolation und Fehlerabschätzungen” des Skripts reproduziert.

2. *Filterung*¹

Gegeben sei die Funktion:

$$f(x) := \sin\left(\frac{x}{200}\right)^2 \exp\left(-\left(\frac{x-1000}{400}\right)^2\right) \quad (1)$$

für 2^{11} äquidistante Punkte im Intervall $[0, 2000]$. Addieren Sie dazu Zufallszahlen, gleichverteilt aus dem Intervall $[-1, 1]$, um ein gemessenes Signal zu simulieren. Wenden Sie nun die Filterung aus der Vorlesung auf diese Daten an. Plotten Sie die Funktion f und die bereinigten Messdaten.

3. *NMR Analyse*²

Sei der wahre Output einer NMR-Analyse gegeben durch

$$f(x) := \exp\left(-\frac{x}{300}\right) \left(\sin\left(\frac{2\pi x}{4.8}\right) + \sin\left(\frac{2\pi x}{4.5}\right) \right) \quad (2)$$

für $x = 0, \dots, N - 1$ mit $N = 2^{12}$ Punkten.

- Plotten Sie das Energiespektrum des wahren Signals.
- Addieren Sie zu den Ergebnissen ein Rauschen, das aus Zufallszahlen uniform aus $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ besteht, um ein gemessenes Signal zu simulieren. Plotten Sie das wahre und das gemessene Signal.
- Plotten Sie das Energiespektrum des gemessenen Signals. Was sind die relevanten Frequenzen?
- Multiplizieren Sie die gemessenen Werte mit $\exp\left(-\frac{x}{200}\right)$ und plotten Sie wiederum das Energiespektrum. Können Sie jetzt die relevanten Frequenzen erkennen?

¹Nach G. Beddard, *Applying Maths in the Chemical and Biomolecular Sciences*, Oxford Press 2009

²Nach G. Beddard, *Applying Maths in the Chemical and Biomolecular Sciences*, Oxford Press 2009

4. Orientierung von Fledermäusen ³

Eine Fledermaus (*Eptesicus fuscus*) verwendet für die Orientierung und Jagd im Flug zwei Arten von Signalen, gegeben durch folgende parametrisierte Funktion:

$$s(t) := \cos\left(150t - \frac{a}{(1+t)^2}\right) \left(e^{-12t} - e^{-13t} + 0.02e^{-10(t-\frac{1}{2})^2}\right). \quad (3)$$

Im normalen Flug ist $a = 0$ und bei der Jagd $a = 60$.

- Plotten Sie die zwei Signale für $t \in [0, 1]$ Millisekunden. Was ist der Unterschied?
- Plotten Sie die Energiespektren. Was ist der Unterschied?
- Berechnen Sie und plotten Sie eine Autokorrelation. Warum ist $a = 60$ viel effektiver bei der Jagd?
- Berechnen Sie und plotten Sie die kummulative Autokorrelation:

$$c_k := \sum_{j=0}^{k-1} \frac{|v_j|}{|v_{N-1}|} \quad (4)$$

gegen die Entfernung in Centimeter ($d = \text{linspace}(0, 10, N)$). In dieser Formel ist v jeweils die Autokorrelation aus der vorherige Aufgabe. Vergleichen Sie mit den experimentell gewonnenen Daten (aus J. Simmons, *Science* 171:925, Fig. 2 oder J. Simmons, 1973):

Entfernung	0	0.5	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
% Erfolg	52	61	70.5	78	88	96	95	97	94	96	97.5	96	96

³Nach G. Beddard, *Applying Maths in the Chemical and Biomolecular Sciences*, Oxford Press 2009