Serie 7

Abgabedatum: Do. 06.04, in den Übungsgruppen

Forum: `https://forum.math.ethz.ch/c/spring-23/numerische-methoden-phys/`

Webpage: `https://metaphor.ethz.ch/x/2023/fs/401-2664-00L/`

1. *Simples Splittingverfahren*

Die folgende ODE beschreibt die Drehung und das gleichzeitige Schrumpfen eines Vektors in $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{d}{dt}\underline{y} = \frac{dR}{dt} \cdot R^{-1} \cdot \underline{y} + b\,\underline{y} \tag{1}$$

mit $b = -0.1$ und der Rotationsmatrix

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta t & -\sin\theta t \\ \sin\theta t & \cos\theta t. \end{pmatrix} \tag{2}$$

a) Identifizieren Sie die Rotations- und Streckungsterme in der ODE. Splitten Sie die ODE in die zwei Terme.

b) Lösen Sie die beiden ODEs, welche Sie durch das Splitting erhalten haben, analytisch.

Hinweis: Die beiden Terme haben eine klare geometrische Bedeutung. Nutzen Sie dies aus um analytische Lösungen zu finden.

c) Implementieren Sie das Strang-Splittingverfahren und integrieren Sie die ODE mit dem Startwert $\underline{y} = (1, 0)$ bis $t = 100$.

Hinweis: Implementieren Sie autonome Lösungsoperatoren.

Hinweis: Verwenden Sie das Template `simple_splitting.py`.

2. *Teilchen im Gravitationsfeld einer Punktmasse*

Bewegungsgleichungen können oft als Hamiltonisches System

$$\dot{\underline{q}} = \nabla_{\underline{p}} \cdot H(\underline{p}, \underline{q}) \tag{3}$$

$$\dot{\underline{p}} = -\nabla_{\underline{q}} \cdot H(\underline{p}, \underline{q}) \tag{4}$$

geschrieben werden. Für ein Teilchen im Gravitationsfeld der Sonne gilt

$$H = 1/2m\ \|\underline{p}\|^2 + U(\underline{q})$$

wobei

$$U(\underline{q}) = U(q) = -\frac{G\,M}{q}.$$

Wir setzen $G = M = m = 1$.

Bitte wenden!

a) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen eines Teilchens in im Gravitationsfeld einer Punktmasse her. Verwenden Sie die Newtonschen Gesetze. Vergewissern Sie sich, dass (3) mit der von Ihnen hergeleiteten ODE übereinstimmt.

b) Spalten Sie den Hamiltonian in zwei Teile $T(\underline{p})$ und $V(\underline{q})$. Welchen physikalischen Grössen ensprechen T und V?

c) Schreiben Sie die beiden ODEs, welche durch das Splitting entstehen, auf und lösen Sie beide analytisch.

d) Implementieren Sie Strang-Splitting oder eines der vielen Splittingverfahren aus Code 2.4.9 im Skript, die Parameter finden Sie auch in `splitting_parameters.py`.

e) Integrieren Sie (3) mit Startwert $p(0) = (0, 1)$, $q(0) = (1, 0)$ bis zur Zeit $t = 50$.

Plotten Sie q_2-q_1, p-q sowie $H - t$, $T - t$ und $V - t$. Die letzten drei Grössen plotten Sie am besten in einem Plot.

- Versuchen Sie andere Startwerte.
- Untersuchen Sie das Langzeitverhalten.
- Probieren Sie auch ganz kleine Schrittweiten aus.

3. Kernaufgabe: Pendel mit Reibung und externer Kraft

Modellierung der Physik

Wir betrachten das mathematische Pendel, welches durch folgende Gleichung ($l = g = 1$) beschrieben ist:

$$\ddot{\varphi} + \mu\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = F(t) \tag{5}$$

mit externer Kraft:

$$F(t) = A\sin(\omega t) \tag{6}$$

mit Frequenz $\omega = 1.3$, Amplitude $A = 1$ und Reibung $\mu = 0$ bzw. $\mu = 0.1$. Verwenden Sie die Anfangswerte $\varphi(0) = \frac{\pi}{3}$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$.

a) Lösen Sie (5) mit Runge-Kutta, z.B. via `scipy.integrate.solve_ivp`.

b) Lösen Sie (5) mit den Splitting-Verfahren `SS`, `PRKS6`, `Y61`, `KL8`.

Hinweis: Sie finden die Parameter der verschiedenen Splittingverfahren in `splitting_parameters.py`.

c) Plotten Sie die Auslenkung $\varphi(t)$ und die Trajektorien im Phasenraum $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$.
Hinweis: Verwenden Sie das Template `pendulum.py`.