Serie 8

Abgabedatum: Fr. 28.04, in den Übungsgruppen

Forum: https://forum.math.ethz.ch/c/spring-23/numerische-methoden-phys/

Webpage: https://metaphor.ethz.ch/x/2023/fs/401-2664-00L/

1. ⋆ Kernaufgabe Runge–Kutta-Methoden I ⋆

Modellierung der Physik

Hinweis: Diese Kernaufgabe besitzt kein Template.

a) Schreiben Sie das explizite Euler-Verfahren, das implizite Euler-Verfahren und die implizite Mittelpunktsregel als Runge–Kutta-Verfahren; geben Sie die entsprechenden Butcher-Tabellen an und erklären Sie die Herleitung jeder diesen Methoden als Runge–Kutta-Verfahren im Sinne der Vorlesung.

b) Programmieren Sie die Methoden von (a) als Runge–Kutta-Verfahren. Verwenden Sie diese um jeweils eine numerische Approximation der Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{y} &= y(t) - 2\sin(t)\,, \qquad t \in [0,4]\,, \\ y(0) &= 1\,, \end{aligned}$$

mit $N = 100$ gleich grossen Zeitschritten zu berechnen und zu ploten. Verwenden Sie Ihren Code um die entsprechenden Konvergenzordungen dieser drei Methoden empirisch zu finden. Die exakte Lösung ist $y(t) = \cos(t) + \sin(t)$.

2. *Pendelsgleichung mit partizioniertem Runge–Kutta-Verfahren*

Berechnen Sie eine numerische Approximation der Lösung des mathematischen Pendels ohne Reibung und ohne äussere Kraft für grosse Zeiten ($T = 400$) mittels einem symplektischen partitionierten Runge–Kutta-Verfahrens der Ordnung 6. Überprüfen Sie diese Konvergenzordnung mit einem Plot eines numerischen Experiments. Plotten Sie in einem Plot den zeitlichen Verlauf der Abweichung der Energie für verschiedene Schrittweiten.

3. *N-Körperproblem mittels Splittingverfahren*

Kombinieren Sie die Lösungen der Aufgaben 7.2 und 6.2 um die Aufgabe 6.2 mittels folgenden Splitting-Methoden zu lösen: 'S2', 'PRKS6', 'BM42', 'BM63'.

Bitte wenden!

4. *Stabile Integration*

Zur Problematik der stabilen Integration betrachten wir das lineare homogene Differentialgleichungssytem:

$$u'(x) = 998u(x) + 1998v(x),$$
$$v'(x) = -999u(x) - 1999v(x)$$

mit Anfangswerten $u(0) = 1$ und $v(0) = 0$.

a) Bestimmen Sie die analytische Lösung der obigen Anfangswertaufgabe.

b) Das obige System soll nun mittels expliziter und impliziter Euler-Methode im Intervall $[0, 2]$ gelöst werden. Worauf muss bei der jeweiligen Methode bei der Wahl der Schrittweiten h geachtet werden? Falls die Schrittweite Beschränkt ist, geben Sie die maximal zulässige an. Implementieren Sie die explizite und die implizite Euler-Methode und überprüfen Sie die Richtigkeit der Aussagen, indem Sie das obige System numerisch lösen.

5. *Stabilitätsfunktion*

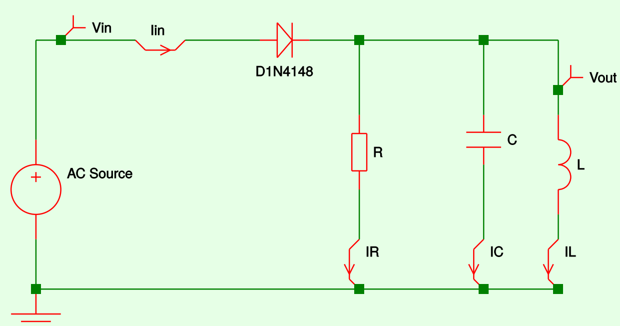
Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion $S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der impliziten Mittelpunktsregel. Zeigen Sie, dass $|S(z)| \leq 1$ ist, genau dann wenn $\mathrm{Re}(z) \leq 0$ gilt.

Hinweis: Es gilt $|z|^2 = z\bar{z}$, wobei $\bar{z}$ das Konjugiertkomplexe $\mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z)$ ist.

6. ⋆ **Kernaufgabe: Schaltkreissimulation** ⋆

Modellierung der Physik

Wir betrachten im Folgenden eine einfache elektronische Schaltung.



Der Plan zeigt eine Schaltung bestehend aus einer Standarddiode (`D 1N4148`), sowie Widerstand R, Kapazität (Kondensator) C und Induktivität (Spule) L. Eingezeichnet sind auch die Messpunkte V_{in} und V_{out} für Spannungen sowie I_{in}, I_R, I_C und I_L für Ströme. Die Schaltung ist an eine Wechselspannungsquelle (AC) mit $V_{in}(t)$ angeschlossen. Gesucht ist die Ausgangsspannung $V_{out}(t)$ relativ zur Erdung.

Siehe nächstes Blatt!

Mathematisches Modell

Aus der Problemstellung ergeben sich folgende Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
V_{in} &= V_D + V_{out} \\
I_D - I_R - I_C - I_L &= 0 \\
V_{out} &= V_C = V_R = V_L \\
V_R &= R I_R \\
I_C &= C \dot{V}_C \\
V_L &= L \dot{I}_L \\
I_D &= I_S \left(e^{\frac{V_D}{n V_T}} - 1 \right)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

wobei der Verlauf der Eingangsspannung $V_{in} = V_0 \sin(2\pi f t)$ mit $V_0 = 5\,\mathrm{V}$ und $f = 50\,\mathrm{Hz}$, die Parameter $n = 1$, $I_S = 1\,\mathrm{nA}$, $V_T = 25\,\mathrm{mV}$ der Diode sowie der Widerstand $R = 100\,\mathrm{k\Omega}$, die Induktivität $L = 50\,\mathrm{mH}$ und die Kapazität $C = 10\,\mathrm{nF}$ bekannt sind.

Aufgabenstellung

a) Leiten Sie eine (nicht-lineare) Differentialgleichung zweiter Ordnung für den Strom $I_L(t)$, der durch die Induktivität (Spule) fliesst, her.

Hinweis: Starten Sie mit Gleichung (1) und versuchen Sie, alle Ströme durch I_L auszudrücken.

b) Lösen Sie diese Gleichung mit Hilfe der impliziten Mittelpunktsregel mit 12001 Zeitschritten und Endzeit $T = 30 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}$. Als Anfangswerte sollen $I_L(0) = 0$ und $\dot{I}_L(0) = 0$ verwendet werden. Messen Sie die für die Integration benötigte Rechenzeit[a].

Hinweis: Verwenden Sie das Template `circuit.py`

c) Implementieren Sie ein allgemeines *implizites* Runge–Kutta-Verfahren mit s Stufen. Der Code soll möglichst generell geschrieben sein und mit beliebigen Butcher-Schemata als Input funktionieren.

Hinweis: Die $\underline{k_i}$ sollen in einen grossen Vektor $\underline{k} := [\underline{k_1}|\dots|\underline{k_s}]^{\mathrm{T}}$ verpackt werden. Dies vereinfacht das Lösen der nicht-linearen Gleichungen.

Hinweis: Verwenden Sie das Template `runge_kutta.py`

d) Benutzen Sie folgende Gauss-Kollokations-Methode der Ordnung 6 um die gegebene Gleichung zu lösen. Das Butcher Schema sei:

$$
\begin{array}{c|ccc}
\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10} & \frac{5}{36} & \frac{2}{9} - \frac{\sqrt{15}}{15} & \frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{30} \\
\frac{1}{2} & \frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{24} & \frac{2}{9} & \frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{24} \\
\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10} & \frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{30} & \frac{2}{9} + \frac{\sqrt{15}}{15} & \frac{5}{36} \\
\hline
 & \frac{5}{18} & \frac{4}{9} & \frac{5}{18}
\end{array}
$$

und hat 3 Stufen. Verwenden Sie wiederum 12001 Zeitschritte und die Endzeit $T = 30 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}$. Als Anfangswerte sollen $I_L(0) = 0$ und $\dot{I}_L(0) = 0$ verwendet werden. Messen Sie die für die Integration benötigte Rechenzeit.

e) Berechnen und plotten Sie jeweils die Spannungen $V_{in}(t)$ und $V_{out}(t)$ gegen die Zeit. Plotten Sie auch den Bereich von 16 ms bis 21 ms separat.

f) Berechnen und plotten Sie jeweils die Ströme $I_D = I_{in}$, I_R, I_C und I_L die durch die verschiedenen Bauteile fliessen. Plotten Sie I_C und I_L im Bereich von 16 ms bis 21 ms separat.

g) Ist die numerische Lösung der Differentialgleichung korrekt?

h) Lösen Sie die Aufgabe mit dem `ode45` Verfahren und vergleichen Sie die Resultate. Die anfängliche Schrittweite soll `2e-5` sein. Verwenden Sie eine relative und eine absolute Toleranz von je `1e-8`. Messen Sie die für die Integration benötigte Rechenzeit.

i) Ist die Differentialgleichung steif? Begründen Sie ob die gewählten Lösungsverfahren geeignet sind? Welche Lösungsverfahren sollte man anderenfalls verwenden?

[a] Das `time` Modul bietet entsprechende Funktionen.
https://docs.python.org/2/library/time.html#time.clock