

## Serie 9

**Abgabedatum:** Fr. 05.05, in den Übungsgruppen

**Forum:** <https://forum.math.ethz.ch/c/spring-23/numerische-methoden-phys/>

**Webpage:** <https://metaphor.ethz.ch/x/2023/fs/401-2664-00L/>

### 1. Kernaufgabe: Anfangsamplitude eines Pendels zu gegebener Periode

#### Modellierung der Physik

Die Bewegungsgleichung eines mathematischen Pendels (Reibung vernachlässigt) der Länge  $l$  ist eine nicht-lineare gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung und das zugehörige Anfangswertproblem ist

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{l} \sin(\phi), \quad \phi(0) = \phi_0 \in ]0, \frac{\pi}{2}], \quad \dot{\phi}(0) = 0,$$

wobei  $\phi(t)$  der Winkel des Pendels in Bezug zur vertikalen Richtung und  $g$  die Gravitationskonstante ist. Für grosse Amplituden ist die Periode  $T$  eine Funktion des Anfangswertes. Man kann eine Formel für  $T(\phi_0)$  wie folgt herleiten. Wir betrachten die gesamte Energie des Pendels, welche in der Zeitentwicklung erhalten bleiben muss

$$\underbrace{mgl(1 - \cos \phi_0)}_{E_0 = E(0)} = \underbrace{\frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + mgl(1 - \cos \phi)}_{E(t)}.$$

Auflösen dieser Gleichung nach  $\dot{\phi}$  ergibt

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \phi - \cos \phi_0)}$$

und per Integration nach  $t$  bekommt man die Periode

$$T(\phi_0) = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\phi_0} \frac{1}{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}} d\phi.$$

Dieses Integral ist singularär bei  $\phi = \phi_0$  und numerisch schwierig zu berechnen. Deshalb wendet man erst die Substitution  $\cos \phi = 1 - 2 \sin^2 \left( \frac{\phi}{2} \right)$  und dann die Variabeltransformation  $\sin \theta = \frac{\sin(\frac{\phi}{2})}{\sin(\frac{\phi_0}{2})}$  an und bekommt

$$T(\phi_0) = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}}_{:=K(k)} d\theta. \quad (1)$$

wobei  $k := \sin \left( \frac{\phi_0}{2} \right)$  und  $|\phi_0| < \pi$ . Das bestimmte Integral  $K(k)$  ist gerade die Definition einer wohlbekannten speziellen Funktion: das *vollständige elliptische Integral erster Art*.

**Bitte wenden!**

## Mathematisches Modell

Wir betrachten in dieser Aufgabe das nicht-lineare Anfangswertproblem.

Bestimmen Sie den Anfangswinkel  $\phi_0$ , so dass  $T = 1.8$  s die Periode der Lösung ist.

Die Parameter sind  $l = 0.6$  m und  $g = 9.81$  ms<sup>-2</sup>. Aufgrund der Symmetrie passiert das Pendel in jedem Fall bei  $t = \frac{T}{4}$  und  $t = \frac{3T}{4}$  seinen tiefsten Punkt. Daher können wir das Problem folgendermassen formulieren:

Bestimmen Sie  $\phi_0 > 0$ , so dass für die Lösung  $t \mapsto \phi(t)$   $\phi(0.45) = 0$  gilt.

## Aufgabenstellung

- a) Schreiben Sie die Differentialgleichung 2. Ordnung als ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung.
- b) Schreiben Sie eine Python Funktion `simulate_pendulum` die den Integrator `solve_ivp` benutzt, um die Pendelgleichung mit den Parametern  $l$  und  $g$  zu lösen. Schreiben Sie ein Interface `solve_for_final_angle` welches sich für die Nullstellensuche in d) eignet.

- c) Lösen Sie das Anfangswertproblem auf  $[0, t_{\text{end}}]$  für die beiden gegebenen Anfangswerte  $\phi_0 = 0.8\frac{\pi}{2}$  und  $\phi_0 = 0.99\frac{\pi}{2}$ . Plotten Sie in beiden Fällen den zeitlichen Verlauf von  $\phi$  und  $\dot{\phi}$ . Verifizieren Sie, dass die Periode der Lösung für den ersten Startwert kleiner und für den zweiten Startwert grösser als  $T = 1.8$  s ist.

- d) Die Funktion  $F$  sei nun mithilfe der Lösung  $\phi(t)$  definiert als

$$F(\phi_0) := \phi(0.45).$$

Verwenden Sie die Python Funktion `fsolve` aus dem Modul `scipy.optimize` um die Nullstelle von  $F(\phi_0)$  zu bestimmen<sup>a</sup>. Plotten Sie die Lösung und verifizieren Sie, dass die numerische Lösung tatsächlich die Periode  $T = 1.8$  s hat.

- e) Anstelle einer numerischen Approximation der Lösung  $\phi(t)$  der Differentialgleichung kann auch die Formel (1) in der Definition der Funktion  $F$  verwendet werden

$$F(\phi_0) := \frac{1}{4}T(\phi_0) - 0.45.$$

Bestimmen Sie wiederum die Nullstelle von  $F$ . Das elliptische Integral  $K(k)$  soll mittels einer zusammengesetzten Simpson Quadraturregel auf 10 Intervallen approximiert werden.

- f) Eine wesentlich effizientere Methode zur Berechnung der Funktion  $K(k)$  verwendet das arithmetisch-geometrische Mittel  $\text{agm}(x, y)$  zweier Zahlen. Es berechnet sich iterativ wie folgt:  $x_0 := x$ ,  $y_0 := y$  und

$$x_{n+1} := \frac{x_n + y_n}{2}$$
$$y_{n+1} := \sqrt{x_n y_n}.$$

Im Limit  $n \rightarrow \infty$  gilt  $x_n = y_n = \text{agm}(x, y)$ . Das elliptische Integral lässt sich nun schreiben als

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}} d\xi = K(k) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\text{agm}(1 - k, 1 + k)}.$$

Verwenden Sie diese Iteration zur Approximation von  $T(\phi_0)$  und bestimmen Sie die Nullstelle von  $F$ . Aufgrund der guten Konvergenz sind nur sehr wenige Iterationen notwendig. Für diese Berechnung hier reichen 5, da stets  $0 < k < 1$ .

*Hinweis:* Verwenden Sie das Template `pendulum.py`.

<sup>a</sup> $F$  ist stetig und steigend auf  $[0.8\pi/2, 0.99\pi/2]$  (grössere Anfangswerte sind längere Perioden) daher hat  $F$  auf diesem Intervall eine eindeutige Nullstelle.

## 2. Nichtlineares System

(Diese Aufgabe besitzt kein Template)

Das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} e^{xy} + x^2 + y - \frac{6}{5} &= 0 \\ x^2 + y^2 + x - \frac{11}{20} &= 0 \end{aligned}$$

ist zu lösen.

- a) Implementieren Sie hierzu ein Newton-Verfahren in Python und lösen Sie damit obiges System mit den Startwerten  $x = \frac{3}{5}$  und  $y = \frac{1}{2}$  bis auf eine Toleranz von  $10^{-14}$ .
- b) Untersuchen Sie die beobachtete Konvergenzordnung für folgende Startwerte:
  1.  $x = \frac{3}{5}$  und  $y = \frac{1}{2}$
  2.  $x = \frac{2}{5}$  und  $y = \frac{1}{4}$
  3.  $x = -\frac{23}{5}$  und  $y = \frac{41}{5}$ .

Vergleichen Sie die beobachtete Konvergenzordnung mit der theoretischen.

## 3. Broyden Verfahren

Schreiben Sie Code, der die Plots aus dem Beispiel 3.9.2 (Broyden-Quasi-Newton-Verfahren: Konvergenz) und Beispiel 3.9.5 (Broyden-Verfahren für ein grosses nicht-lineares System), reproduziert.

Implementieren Sie zusätzlich auch die teurere Version des Broyden-Verfahren und plotten Sie diese ebenfalls.

*Hinweis:* Diese Aufgabe besitzt kein Template.