# Forcing

Serie 0

Partialordnungen und Martin-Axiom

Besprechung am 1. März

---

**0.** Sei $\mathbb{P} = (P, \leq)$ eine Forcingpartialordnung. Zeige, dass folgendes gilt:

(a) Ist $D \subseteq P$ offen dicht und $A \subseteq D$ eine maximale Antikette in $D$ (*d.h.* für alle $p \in D$ existiert ein $q \in A$, so dass $p$ und $q$ kompatibel sind), dann ist $A$ eine *maximale* Antikette in $P$.

(b) Ist $A \subseteq P$ eine maximale Antikette in $P$, dann ist $D = \{q \in P : \exists r \in A(q \geq r)\}$ eine offen dichte Teilmenge von $P$.

**1.** Eine Menge $\mathscr{B} \subseteq [\omega]^\omega$ ist eine Basis eines nicht-trivialen Ultrafilters $\mathscr{U} \subseteq [\omega]^\omega$, falls gilt:

$$\mathscr{U} = \{x \in [\omega]^\omega : \exists y \in \mathscr{B}(y \subseteq x)\}$$

Die **Ultrafilter-Zahl** $\mathfrak{u}$ ist die kleinste Kardinalität einer Ultrafilterbasis. Das heisst:

$$\mathfrak{u} = \min\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B} \subseteq [\omega]^\omega \text{ ist eine Basis eines nicht-trivialen Ultrafilters}\}$$

Zeige:

$$\text{MA} \Longrightarrow \mathfrak{u} = \mathfrak{c}$$

*Hinweis*: Verwende die Partialordnung mit den Bedingungen $(s, x)$, wobei $s \in \text{fin}(\omega)$ und $x \in \mathscr{B}$, wobei $\mathscr{B} \subseteq [\omega]^\omega$ eine Filterbasis der Kardinalität $< \mathfrak{c}$ ist, und definiere:

$$(s, x) \leq (t, y) :\Longleftrightarrow\ s \subseteq t \ \wedge\ x \supseteq y \ \wedge\ t \setminus s \subseteq x$$