Forcing

Serie 12

Zur Konsistenz von $\omega_1 = \mathfrak{s} = \mathfrak{b} < \mathfrak{d} = \mathfrak{c}$

Besprechung am 24. Mai

---

35. (a) Zeige: Für jede Ordinalzahl λ gilt $\mathbb{C}_\lambda \approx \mathbb{C}_{|\lambda|} \approx \mathbb{C}^{|\lambda|} \approx \mathbb{C}^\lambda$.

(b) Zeige: Ist $\gamma \neq 0$ eine abzählbare Ordinalzahl, so gilt $\mathbb{C} \approx \mathbb{C}_\gamma \approx \mathbb{C}^\gamma$.

36. Zeige: Gilt $\mathbf{V} \models \mathfrak{b} > \omega_1$ und ist G $\mathbb{C}^{\omega_1}$-generisch über $\mathbf{V}$, wobei $\mathbb{C}^{\omega_1}$ das endliche Support Produkt von $\mathbb{C} = \left(\bigcup_{n\in\omega} {}^n\omega, \subseteq\right)$ bezeichnet, so ist $\mathbf{V}[G] \models \mathfrak{d} \geq \mathfrak{d}^{\mathbf{V}}$.

Hinweis: Zeige, dass für jede Funktion $f \in {}^\omega\omega \cap \mathbf{V}[G]$ eine Funktion $g_f \in {}^\omega\omega \cap \mathbf{V}$ existiert, sodass für alle $h \in {}^\omega\omega \cap \mathbf{V}$ gilt:

$$h <^* f \to h <^* g_f$$

37. Zeige, dass die Aussage $\omega_1 = \mathfrak{s} = \mathfrak{b} < \mathfrak{d} = \mathfrak{c}$ mit ZFC konsistent ist.

Hinweis: Starte mit einem Modell $\mathbf{V} \models \mathsf{ZFC}+\mathfrak{c} = \mathfrak{p} > \omega_1$ (*z.B.* $\mathbf{V} \models \mathsf{MA}+\mathfrak{c} > \omega_1$), und addiere zu $\mathbf{V}$ mit dem endlichen Support Produkt $\mathbb{C}^{\omega_1}$, wobei wieder $\mathbb{C} = \left(\bigcup_{n\in\omega} {}^n\omega, \subseteq\right)$, eine Familie $\mathscr{F} := \{c_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ von Cohen reals der Kardinalität ω_1. Die Familie $\mathscr{F}$ ist dann unbounded, aus $\mathscr{F}$ lässt sich eine splitting family derselben Kardinalität konstruieren, und mit Aufgabe 36 gilt in der generischen Erweiterung $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$.