Forcing

Serie 1

Homogene Mengen und Martin-Axiom — Besprechung am 8. März

Für $n \in \omega$ bezeichnet ${}^n\omega$ die Menge aller Funktionen $s : n \to \omega$, und ${}^\omega\omega$ bezeichnet die Menge aller Funktionen $f : \omega \to \omega$. Für $s, t \in \bigcup_{n\in\omega} {}^n\omega$ definieren wir

$$s \preceq t :\iff t|_{\mathrm{dom}(s)} = s\,.$$

Für eine Funktion $g : A \to B$ ist $\mathrm{rng}(g) := g[A]$.

Für $m, n \in \omega$ und $t \in {}^n\omega$ sei $t^\frown m := t \cup \{\langle n, m\rangle\}$, das heisst $t^\frown m \in {}^{n+1}\omega$ und $t^\frown m(n) = m$.

Eine Menge $T \subseteq \bigcup_{n\in\omega} {}^n\omega$ ist ein **Baum**, falls für alle $s, t \in \bigcup_{n\in\omega} {}^n\omega$ gilt:

$$s \preceq t \wedge t \in T \;\to\; s \in T$$

Für einen Baum $T \subseteq \bigcup_{n\in\omega} {}^n\omega$ bezeichnet

$$[T] := \big\{ f \in {}^\omega\omega : \forall n \in \omega (f|_n \in T) \big\}$$

die Menge aller unendlichen Äste durch T.

2. Sei $\mathscr{U} \subseteq [\omega]^\omega$ ein Ultrafilter. Wir definieren die folgende Partialordnung $\mathbb{P} = (P, \leq)$: Bedingungen aus P sind Paare (s, T_s), wobei $s \in {}^n\omega$ (für ein $n \in \omega$) und T_s ein Baum ist mit $s \in T_s$, wobei für alle $t \in T_s$ gilt: $s \preceq t$ oder $t \preceq s$; und für alle $t \in T_s$ mit $s \preceq t$ gilt:

$$\big\{ m \in \omega : t^\frown m \in T_s \big\} \in \mathscr{U}\,.$$

Schliesslich definieren wir

$$(s, T_s) \leq (t, T_t) :\iff s \preceq t \wedge t \in T_s \wedge T_s \supseteq T_t\,.$$

Zeige: Für jede Färbung $\pi : [\omega]^2 \to 2$ ist die Menge

$$D_\pi = \Big\{ (s, T_s) \in P : \forall f \in [T_s] \,\big(\pi|_{[\mathrm{rng}(f)\setminus \mathrm{rng}(s)]^2} \text{ ist konstant} \big) \Big\}$$

offen dicht in P.

3. Die Partitionszahl $\mathfrak{par}$ ist die kleinste Kardinalität einer Familie $\mathscr{P}$ von 2-Färbungen $\pi : [\omega]^2 \to 2$, sodass keine unendliche Menge $H \in [\omega]^\omega$ für alle Färbungen $\pi \in \mathscr{P}$ fast homogen ist, wobei H fast homogen ist für $\pi \in \mathscr{P}$, falls ein $n \in \omega$ existiert sodass $\pi|_{[H\setminus n]^2}$ konstant ist.

Zeige mit der Partialordnung aus Aufgabe 2:

$$\mathsf{MA} \Longrightarrow \mathfrak{par} = \mathfrak{c}$$