Forcing

Serie 4

Reelle Zahlen in Forcing Erweiterungen

Besprechung am 29. März

Sei $\mathbb{P} = (P, \leq)$ die Partialordnung aus Aufgabe 2 (bezüglich einem Ultrafilter $\mathscr{U} \in \mathbf{V}$), sei $\mathbf{V} \models \mathsf{ZFC}$, und sei G ein $\mathbb{P}$-generischer Filter über $\mathbf{V}$.

10. (a) Zeige, dass es in $\mathbf{V}[G]$ eine Funktion $f \in {}^{\omega}\omega$ gibt, so dass für alle Funktionen $g \in {}^{\omega}\omega$ welche in $\mathbf{V}$ liegen gilt: $g <^* f$, *d.h.*

$$\exists n_0 \forall k \geq n_0 \big(g(k) < f(k)\big)$$

(b) Zeige, dass es in $\mathbf{V}[G]$ eine monoton wachsende, divergente Funktion $h \in {}^{\omega}\omega$ gibt, so dass für alle monoton wachsenden, divergenten Funktionen $g \in {}^{\omega}\omega$ welche in $\mathbf{V}$ liegen gilt: $h <^* g$.

(c) Zeige, dass es in $\mathbf{V}[G]$ eine Menge $z \in [\omega]^{\omega}$ gibt, so dass für alle $x \in \mathscr{U}$ welche in $\mathbf{V}$ liegen gilt: $z \subseteq^* x$.

(d) Zeige, dass es in $\mathbf{V}[G]$ eine Menge $x \in [\omega]^{\omega}$ gibt, so dass für alle $y \in [\omega]^{\omega}$ welche in $\mathbf{V}$ liegen gilt:

$$x \subseteq^* y \quad \vee \quad x \subseteq^* (\omega \setminus y)$$

11. Zeige, dass es in $\mathbf{V}[G]$ ein $x \in [\omega]^{\omega}$ gibt, so dass für alle 2-Färbungen $\pi : [\omega]^2 \to 2$ welche in $\mathbf{V}$ liegen gilt, dass x fast homogen für π ist (*d.h.* es existiert eine endliche Menge $E \in \operatorname{fin}(\omega)$, sodass $\pi|_{[x \setminus E]^2}$ konstant ist).

Hinweis: Vergleiche mit Aufgabe 2.