Forcing

Serie 6

Modelle von Fragmenten von ZFC

Besprechung am 19. April

14. Sei $\mathsf{ZFC} - \mathsf{I} := \mathsf{ZFC} - $ Unendlichkeitsaxiom.

Zeige, dass gilt: $\mathbf{V}_\omega \models \mathsf{ZFC} - \mathsf{I}$

15. Sei $\mathsf{ZFC}^* \subseteq \mathsf{ZFC}$ die Axiomenmenge bestehend aus dem Axiom der leeren Menge, dem Extensionalitätsaxiom, dem Paarmengenaxiom und dem Unendlichkeitsaxiom.

Konstruiere ein Mengenmodell $\mathbf{M} = (M, \in)$ mit $\mathbf{M} \models \mathsf{ZFC}^*$.

16. (a) Eine Kardinalzahl κ heisst **unerreichbar** wenn folgendes gilt:

(1) κ ist Limeskardinalzahl,

(2) κ ist regulär,

(3) für alle Kardinalzahlen $\lambda < \kappa$ ist $2^\lambda < \kappa$.

Zeige: Ist κ unerreichbar, so gilt $\mathbf{V}_\kappa \models \mathsf{ZFC}$.

(b) Eine Kardinalzahl κ heisst **worldly** wenn gilt $\mathbf{V}_\kappa \models \mathsf{ZFC}$.

Zeige: Ist κ worldly, so gilt (1) und (3).

Bemerkung: Ist κ worldly, so muss κ nicht notwendigerweise regulär sein.

17. Der SATZ VON LÖWENHEIN-SKOLEM (FÜR ZFC) besagt, dass ZFC ein abzählbares Modell besitzt.

Zeige, dass der SATZ VON LÖWENHEIN-SKOLEM (FÜR ZFC) in ZFC nicht beweisbar ist.

Hinweis: Wäre der SATZ VON LÖWENHEIN-SKOLEM (FÜR ZFC) in ZFC beweisbar, so gäbe es in jedem Modell $\mathbf{V} \models \mathsf{ZFC}$ eine abzählbare Menge $M \in \mathbf{V}$ mit $M \models \mathsf{ZFC}$.