Forcing

Serie 7

Mengenmodelle

Besprechung am 26. April

---

18. Zeige, dass $\mathbf{M} = (\{\omega_1\}, \in)$ ein Mengenmodell für das Axiom der leeren Menge ist.

19. Konstruiere ein endliches Mengenmodell, das nicht extensional ist.

20. Konstruiere ein unendliches Mengenmodell, welches extensional ist, aber das Paarmengenaxiom nicht erfüllt.

21. Konstruiere ein abzählbares Mengenmodell $(M, \in)$, mit $\omega \in M$ und $\omega \subseteq M$, welches das Potenzmengenaxiom erfüllt.

22. (a) Sei $M = \{\omega + n + 1 : n \in \omega\}$ und $\mathbf{M} = (M, \in)$ das zugehörige Mengenmodell. Welche der folgenden Axiome sind in $\mathbf{M}$ gültig?

- Axiom der leeren Menge
- Extensionalitätsaxiom
- Vereinigungsaxiom
- Unendlichkeitsaxiom (umformuliert wie in 22.(b))

(b) Sei $\mathbf{M} = (\omega_1, \in)$ ein Mengenmodell.

Zeige, dass in $\mathbf{M}$ alle Axiome von ZFC ausser dem Parrmengenaxiom und dem Aussonderungsaxiom gültig sind – wobei das Unendlichkeitsaxiom und das Auswahlaxiom wie folgt umformuliert werden:

Unendlichkeitsaxiom: $\exists I \big(\emptyset \in I \land \forall x \in I\, \exists y \in I\, \forall z\, (z \in y \leftrightarrow (z = x \lor z \in x))\big)$

Auswahlaxiom: $\forall \mathscr{F}\, \exists C\, \forall x \in \mathscr{F} \big(x \neq \emptyset \to \exists! z\, (z \in x \land z \in C)\big)$