Forcing – Serie 0 – Musterlösung

Aufgabe 0a.

Beh 1: A ist eine Antikette in P.

Wir beweisen indirekt und nehmen an es gibt $p, q \in A$, die in P kompatibel sind. Das heisst, es gibt ein $r \in P$ mit $p \le r \ge q$. Da D dicht ist, gibt es ein $s \in D$ mit $s \ge r$. Das heisst, p und q sind auch in D kompatibel. Somit ist A keine Antikette in D. Das ist ein Widerspruch.

Beh 2: A ist maximal in P.

Wir beweisen indirekt. Angenommen

d.h. p und a sind inkompatibel

$$\exists p \in P \; \forall a \in A \; (p \perp a) \qquad (*)$$

Da D dicht ist in P, gibt es ein $q \ge p$ mit $q \in D$. Wäre $q \in A$, hätten wir einen Widerspruch zu $(*)$. Das heisst also $q \notin A$. Da $A \subseteq D$ eine maximale Antikette ist, gibt es ein $a \in A$, sodass q und a kompatibel sind. Dann sind aber auch p und a kompatibel. Das ist ein Widerspruch.

Aufgabe 0b

Beh 1: D ist offen in P.

Sei $p \in D$ und sei $q \ge p$. Da $p \in D$ ist, gibt es ein $r \in A$ mit $p \ge r$. Daraus folgt $r \le p \le q \Rightarrow r \le q$. Somit ist also auch $q \in D$.

Beh 2: D ist dicht in P.

Sei $p \in P$ beliebig. Da A eine maximale Antikette ist, gibt es ein $a \in A$, sodass p und a kompatibel sind. Das heisst, es gibt ein $q \in P$ mit

$$p \le q \ge a.$$

Dieses q liegt in D. Also ist D auch dicht.

Aufgabe 1

Sei $\mathcal{B} \subseteq [\omega]^\omega$ eine Basis eines Filters mit der Kardinalität von $\mathcal{B}$ kleiner als $\mathfrak{c}$. Weiter sei

$$P := \{(s, x) \mid s \in \mathrm{fin}(\omega) \land x \in \mathcal{B}\}$$

mit $(s, x) \le (t, y) :\Leftrightarrow s \subseteq t \land x \supseteq y \land t \setminus s \subseteq x$.

Dies ist eine Partialordnung. Offenbar ist $(\mathbb{P}, \leq)$ reflexiv und transitiv. Ausserdem erfüllt $(\mathbb{P}, \leq)$ die "countable chain condition" (c.c.c). Dies zeigen wir indirekt. Sei A eine überabzählbare Antikette. Da $\mathrm{fin}(\omega)$

der von $\mathcal{B}$ erzeugte Filter

abzählbar ist, gibt es $(s,x), (s,x') \in A$ mit $x \neq x'$. Da $x, x' \in \mathcal{U}$ sind, ist auch $x \cap x' \in \mathcal{U}$. D.h. es gibt ein $y \in \mathcal{B}$ mit $y \subseteq x \cap x'$. Weiter gilt

$$(s,x) \leq (s,y) \geq (s',x').$$

Das heisst, A ist keine Antikette.

Für jedes $y \in \mathcal{B}$ und alle $n \in \omega$ definieren wir

$$D_y := \{(s,x) \in P \mid x \subseteq y\} \text{ und}$$

$$E_n := \{(s,x) \in P \mid |s| \geq n\}.$$

Sei $\mathcal{D} := \{D_y \mid y \in \mathcal{B}\} \cup \{E_n \mid n \in \omega\}$. Es gilt $|\mathcal{D}| < \mathfrak{c}$, da $|\mathcal{B}| < \mathfrak{c}$ ist. Mit dem Martin-Axiom erhalten wir einen $\mathcal{D}$-generischen Filter G. Sei

$$x_G = \bigcup \{s \mid \exists x \in \mathcal{B}((s,x) \in G)\}.$$

Da $G \cap E_n \neq \emptyset$ ist für jedes $n \in \omega$, folgt, dass $x_G \in [\omega]^\omega$ ist. Weiter gilt $x_G \subseteq^* y$ für jedes $y \in \mathcal{B}$. Warum? Sei $y \in \mathcal{B}$. Da $G \cap D_y \neq \emptyset$ ist, gibt es ein $(s,x) \in G$ mit $x \subseteq y$. Sei nun $(s',x') \in G$ beliebig. Da G ein Filter ist, sind (s,x) und (s',x') kompatibel. D.h. es gibt ein $(t,z) \in G$ mit

$$(s,x) \leq (t,z) \geq (s',x').$$

Es folgt $s' \setminus s \subseteq t \setminus s \subseteq x \subseteq y$. Also haben wir in der Tat

$$x_G \subseteq^* y.$$

Sei $y_G \in [x_G]^\omega$ mit $|\omega \setminus y_G| = \omega$. Dann gilt $y_G \notin \mathcal{U}$ und $\omega \setminus y_G \notin \mathcal{U}$. Das heisst, $\mathcal{U}$ ist kein Ultrafilter. Also gilt tatsächlich

$$MA \Rightarrow \mathfrak{u} = \mathfrak{c}.$$