Forcing – Serie 1 – Musterlösung

Aufgabe 2

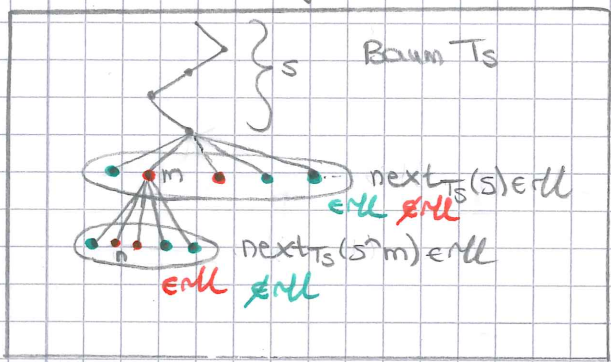
Sei $\pi : [\omega]^2 \to 2$ eine Färbung

Beh 1: D_π ist dicht

Für die einfachere Verständlichkeit, wird hier darauf verzichtet, alles streng formal aufzuschreiben.

Sei $(s, T_s) \in P$ ein Baum. Wir modifizieren T_s wie folgt.

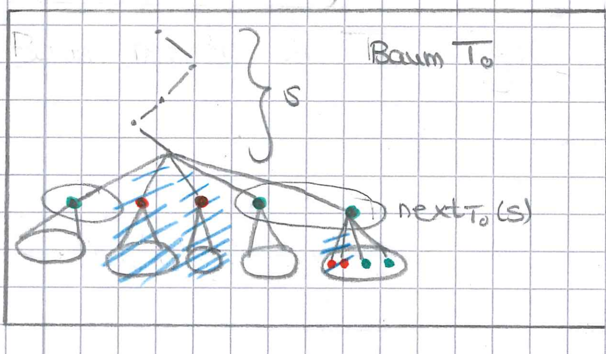
Schritt 1: Für jeden Baum T und jedes $t \in T$ sei $next_T(t) := \{n \in \omega \mid t^\frown n \in T\}$



und $succ_T(t) = \{s \in T \mid \exists n \in \omega (s = t^\frown n)\}$. Färbe jedes n (wie im Bild) mit der Farbe $\pi(\{n, m\})$ (im Bild rot). Da $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist, ist entweder die rote oder die grüne Teilmenge in $\mathcal{U}$.

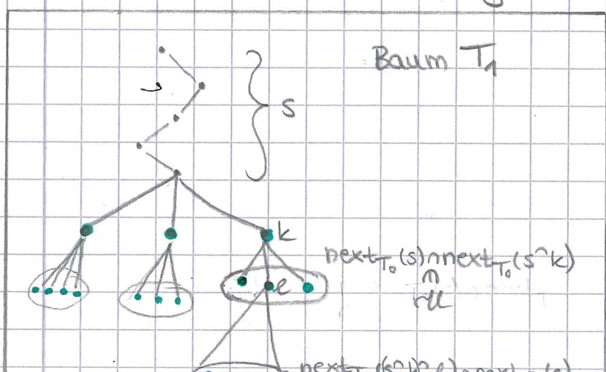
Im Bild ist die rote Teilmenge in $\mathcal{U}$. Das heisst wir färben $m \in next_{T_s}(s)$ rot. Auch in $next_{T_s}(s)$ ist nun entweder die Menge aller grünen Punkte in $\mathcal{U}$ (wie in unserem Bild) oder die Menge der roten Punkte.

Schritt 2: Nun entfernen wir Äste f aus $[T_s]$ für die $f(|s|)$



(in unserem Fall) rot ist oder für die $f(|s|+1)$ rot ist.

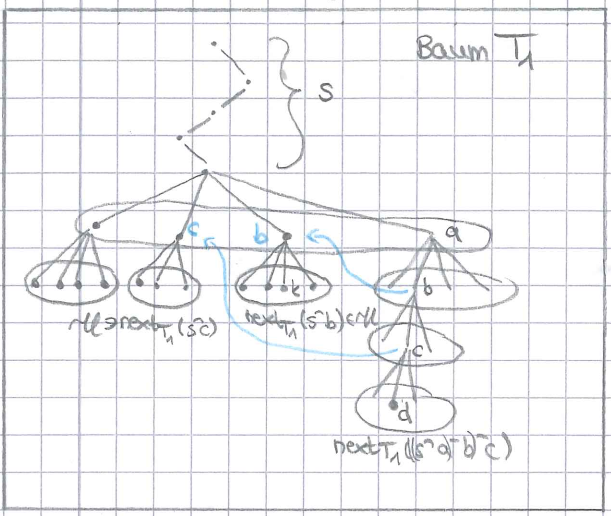
Schritt 3: Nun schneiden wir jede Menge $next_{T_0}(t)$ mit $next_{T_0}(s)$, wobei



$t \in T$ mit $t \trianglerighteq s$ ist. Bemerke: Da $next_{T_0}(s)$ und $next_{T_0}(t)$ in $\mathcal{U}$ sind, ist auch $next_{T_0}(s) \cap next_{T_0}(t) \in \mathcal{U}$. Den so modifizierten Baum nennen wir T_1.

(resp. könnte auch weiter weg/ näher beim Stamm sein)

Schritt 4: Färbe jedes d (wie im Bild) mit der Sequenz $\langle \pi(\{b,d\}), \pi(\{c,d\})\rangle$.



Da $next_{T_1}(s^\frown a) \subseteq next_{T_1}(s)$ ist, liegt der Punkt b schon irgendwo in $next_{T_1}(s)$. Auch der Punkt c liegt in $next_{T_1}(s)$. Bemerke, dass $\pi(\{d,a\})$ grün ist. Jedes $k \in next_{T_1}(s^\frown b)$ erfüllt $\pi(\{b,k\}) =$ grün. Analoges gilt auch für die Punkte in $next_{T_1}(s^\frown c)$. Das heisst die Menge aller Punkte in

$next_{T_1}(((s^\frown a)^\frown b)^\frown c) \cap next_{T_1}(s^\frown c) \cap next_{T_1}(s^\frown b) \in \mathcal{U}$ haben nur grün in der zugeordneten Sequenz. Lassen wir alle anderen Punkte weg, so bekommen wir einen Baum T_2 mit $(s, T_2) \in P$.

Schritt 5: Wir modifizieren den Baum so weiter. Am Ende bekommen wir einen Baum T, sodass $(s,T) \in D_\pi$ ist. Das heisst, D_π ist dicht.

Beh 1: D_π ist offen

Sei $(s, T_s) \in D_\pi$ und sei $(s, T_s) \leq (t, T_t)$. Sei $f \in [T_t]$. Da $T_t \subseteq T_s$ ist, folgt $f \in [T_s]$. Das heisst, $\pi|_{[rng(f) \setminus rng(s)]^2}$ ist konstant. Da $rng(s) \subseteq rng(t)$ ist, erhalten wir auch, dass

$$\pi|_{[rng(f) \setminus rng(s)]^2}$$

konstant ist. Somit ist $(t, T_t) \in D_\pi$ und D_π ist tatsächlich offen.

Aufgabe 3

Beh 1: $(P, \leq)$ erfüllt ccc

Zwei Bedingungen $(s, T_s), (t, T_t) \in P$ mit demselben Stamm $s = t$ sind kompatibel. Da es nur abzählbar viele verschiedene Stämme gibt, muss jede Antikette abzählbar sein. Bemerke, dass $(P, \leq)$ sogar σ-centred ist.

Beh 2: $MA \Rightarrow par = c$

Sei $\mathcal{P} \subseteq \{\pi \mid \pi : [\omega]^2 \to 2\}$ mit $|\mathcal{P}| < c$. Für jedes $n \in \omega$ definieren wir

$$B_n := \{(s, T_s) \in P \mid |rng(s)| > n\}.$$

Diese Mengen sind offen dicht.

offen ✓

dicht: Sei $(s, T_s) \in \mathbb{P}$. Sei $m_0 \in \text{next}_{T_s}(s) \setminus \text{rng}(s)$. Wir definieren $t_0 := s^\frown m_0$. Sei $m_1 \in \text{next}_{T_s}(t_0) \setminus \text{rng}(t_0)$. Dann ist $t_1 = t_0^\frown m_1$ etc. Sei $t = t_n$. Wir definieren

$$T_t := \{ s \in T_s \mid s \leq t \text{ oder } s \geq t \}.$$

Dann ist $(t, T_t) \in B_n$ und $(s, T_s) \leq (t, T_t)$. ⌟

Sei nun $\mathcal{D} := \{ B_n \mid n \in \omega \} \cup \{ D_\pi \mid \pi \in \mathcal{P} \}$. Es gilt

$$|\mathcal{D}| = |\omega| + |\mathcal{P}| < \mathfrak{c}.$$

Nach dem Martin-Axiom gibt es einen $\mathcal{D}$-generischen Filter G. Wir definieren

$$s_G = \bigcup \{ s \mid \text{Es gibt einen Baum } T_s \text{ mit } (s, T_s) \in G \}.$$

Da G jedes B_n schneidet, gilt $s_G \in {}^\omega\omega$ mit $|\text{rng}(s_G)| = \omega$. Da G jedes D_π schneidet, gilt, dass $\text{rng}(s_G)$ bezüglich jedem $\pi \in \mathcal{P}$ fast homogen ist. Das heisst, $\mathfrak{par} = \mathfrak{c}$.