Forcing – Serie 3 – Musterlösung

Aufgabe 7a

Beispielsweise ist für jedes $n\in\omega$ die Menge

$$\{\{\langle n,0\rangle\},\{\langle n,1\rangle\}\}$$

eine maximale Antikette.

Oder für jedes $n\in\omega\setminus\{0\}$ ist die Menge

$$\{f\in Fn(\omega,2)\mid dom(f)=n\}$$

eine maximale Antikette.

Aufgabe 7b

Sei $x=(x_k)_{k\in\omega}$ eine 0-1-Folge. Für jedes $n\in\omega\setminus\{0\}$ definieren wir

$$f_{n,x}: n\to 2$$
$$k\mapsto\begin{cases}x_k & \text{wenn } k<n-1\\ x_k+1 \pmod 2 & \text{wenn } k=n-1.\end{cases}$$

Weiter sei

$$A_x := \{f\in Fn(\omega,2)\mid \exists n\in\omega(f=f_{n,x})\}.$$

Wir zeigen nun, dass dies eine maximale Antikette ist.

Beh 1: A_x ist eine Antikette.

Seien $f=f_{n,x}$ und $g=f_{m,x}$ zwei verschiedene Elemente von A_x. Dann gilt oBdA $n<m$. Das heisst,

$$g(n-1)=x_{n-1}\neq f(n-1).$$

Das heisst, f und g sind inkompatibel und daher ist A_x eine Antikette.

Beh 2: A_x ist maximal

wenn nicht, erweitere f einfach irgendwie

Sei $f\in Fn(\omega,2)$. OBdA sei $dom(f)=n$ für ein $n\in\omega\setminus\{0\}$. Sei k maximal, sodass für jedes $i<k$

$$f(i)=x_i$$

ist. Es gibt zwei Fälle zu unterscheiden.

↳ 1. Fall: $k\in dom(f)=n$

Dann ist $f(k)\neq x_k$ und daher sind f und $f_{k+1,x}$ kompatibel.

↳ 2. Fall $k = \mathrm{dom}(f) = n$.

In diesem Fall sind f und $f_{n+1,x}$ kompatibel.

Also ist A_x sogar eine maximale Antikette.

<u>Aufgabe 6a</u>

Nach Definition der kanonischen $\mathbb{P}$-Namen erhalten wir

$\dot{x} = \{\langle\emptyset,\emptyset\rangle\}$,

$\dot{y} = \{\langle\dot{x},\emptyset\rangle\} = \{\langle\{\langle\emptyset,\emptyset\rangle\},\emptyset\}$ und

$\dot{z} = \{\langle\emptyset,\emptyset\rangle, \langle\dot{x},\emptyset\rangle\} = \{\langle\emptyset,\emptyset\rangle, \langle\{\langle\emptyset,\emptyset\rangle\},\emptyset\rangle\}$

← alternative Lösung weiter hinten

<u>Aufgabe 6b</u>

Seien $p, q, r \in P$ paarweise inkompatibel. Die 3 Bedingungen müssen paarweise inkompatibel sein gemäss Fact 15.9. Weiter definieren wir

$$\underset{\sim}{u} = \{\langle\emptyset,p\rangle, \langle\emptyset,r\rangle, \langle\dot{x},q\rangle, \langle\dot{x},r\rangle\}$$

Wir prüfen nun nach, dass $p \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{u} = \{\langle\emptyset,\emptyset\rangle\}$ gilt mit Definition 15.8 a.

α) Für $\langle\emptyset,p\rangle \in \underset{\sim}{u}$ ist die Menge

$$\{s \geq p \mid s \geq p \rightarrow \exists\langle\underset{\sim}{w},t\rangle \in \{\langle\emptyset,\emptyset\rangle\}(s \geq t \wedge s \Vdash_{\mathbb{P}} \emptyset = \underset{\sim}{w})\}$$
$$= \{s \geq p \mid s \Vdash_{\mathbb{P}} \emptyset = \emptyset\}$$

dicht. Denn jedes $s \in P$ forciert $\emptyset = \emptyset$.

Analog sehen wir, dass für $\langle\emptyset,r\rangle$ die Menge

$$\{s \geq r \mid s \Vdash_{\mathbb{P}} \emptyset = \emptyset\}$$

dicht ist.

Für $\langle\dot{x},q\rangle \in \underset{\sim}{u}$ ist die Menge

$$\{s \geq p \mid s \geq q \rightarrow \exists\langle\underset{\sim}{w},t\rangle \in \{\langle\emptyset,\emptyset\rangle\}(s \geq t \wedge s \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{x} = \underset{\sim}{w})\}$$
$$= \{s \in P \mid s \geq p\}$$

dicht oberhalb von p. Bemerke, dass es keine $s \in P$ gibt mit $p \leq s \geq q$, da p und q inkompatibel sind.

Analoges können wir auch für $\langle\dot{x},r\rangle \in \underset{\sim}{u}$ zeigen.

β) Die Menge

$$\{s \in P \mid \exists\langle\underset{\sim}{w},t\rangle \in \underset{\sim}{u}\ (s \geq t \wedge s \Vdash_{\mathbb{P}} \emptyset = \underset{\sim}{w})\}$$

ist offen dicht, da z.B. $\langle \emptyset, p\rangle \in \underset{\sim}{y}$ ist.

Also gilt tatsächlich $p \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{y} = \underset{\cdot}{x}$. Zeigen wir nun noch, dass

$$q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{y} = \{\langle \underset{\cdot}{x}, \emptyset\rangle\}$$

gilt.

(α) Für $\langle \emptyset, p\rangle \in \underset{\sim}{y}$ ist die Menge

$$\{s \geq q \mid s \geq p \rightarrow \exists \ldots\}$$

dicht, da wieder p und q inkompatibel sind. Analoges gilt für die zu $\langle \emptyset, r\rangle \in \underset{\sim}{y}$ gehörige Menge.

Für $\langle \underset{\cdot}{x}, q\rangle \in \underset{\sim}{y}$ ist die dazugehörige Menge

$$\{s \geq q \mid s \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\cdot}{x} = \underset{\cdot}{x}\}$$

dicht, da jedes $s \in P$ forciert, dass $\underset{\cdot}{x} = \underset{\cdot}{x}$ ist.

Für $\langle \underset{\cdot}{x}, r\rangle$ ist die dazugehörige Menge

$$\{s \geq q \mid s \geq r \rightarrow \exists \ldots\}$$

dicht, da q und r inkompatibel sind.

(β) Für $\langle \underset{\cdot}{x}, \emptyset\rangle \in \underset{\cdot}{X}$ ist die dazugehörige Menge

$$\{s \geq q \mid \exists \langle \underset{\sim}{w}, t\rangle \in \underset{\sim}{y} \ (s \geq t \wedge s \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\cdot}{x} = \underset{\sim}{w})\}$$

dicht oberhalb von q, da $\langle \underset{\cdot}{x}, q\rangle \in \underset{\sim}{y}$ ist. Somit gilt $q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{y} = \underset{\cdot}{X}$.

Analog können wir zeigen, dass $r \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{y} = \underset{\cdot}{z}$ gilt.

<u>Aufgabe 8a</u>

Hier prüfen wir direkt Definition 15.8 (b) nach. Es gilt

$$\underset{\sim}{G} = \{\langle \underset{\cdot}{p}, p\rangle \mid p \in P\}$$

Sei $p \in P$. Die Menge

$$\{q \geq p \mid \exists \langle \underset{\cdot}{r}, r\rangle \in \underset{\sim}{G} \ (q \geq r \wedge q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\cdot}{r} = \underset{\cdot}{p})\} =$$

$$= \{q \geq p \mid \langle \underset{\cdot}{p}, p\rangle \in \underset{\sim}{G}\} = \{q \mid q \geq p\}$$

ist dicht oberhalb von p. Somit gilt $p \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\cdot}{p} \in \underset{\sim}{G}$.

Aufgabe 8b

Seien $p, q \in P$ inkompatibel. Nach Definition 15.8 c) müssen wir für jedes $s \geq q$ zeigen, dass

$$s \Vdash_{\mathbb{P}} \check{p} \in \underset{\sim}{G}$$

gilt. Sei also $s \geq q$. Die Menge

$$\{r \geq s \mid \exists \langle t, t \rangle \in \underset{\sim}{G} \, (r \geq t \wedge r \Vdash_{\mathbb{P}} \check{t} = \check{p})\} =$$

$$= \{r \geq s \mid r \geq p\} = \emptyset,$$

da s und p inkompatibel sind. Die leere Menge ist nicht dicht oberhalb von s.

Also gilt wie gewünscht $s \not\Vdash_{\mathbb{P}} \check{p} \in \underset{\sim}{G}$ und daher auch $q \Vdash_{\mathbb{P}} \check{p} \notin \underset{\sim}{G}$.

Aufgabe 9a

Nach der Bemerkung auf S. 352 unten gilt: Wenn wir

$$\underset{\sim}{\#}[G] \cap \underset{\sim}{G}[G] = \emptyset \qquad (*)$$

haben, sofern $\emptyset \in G$ ist, so folgt

$$\emptyset \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{\#} \cap \underset{\sim}{G} = \check{\emptyset}.$$

Prüfen wir also $(*)$ nach: Es gilt $\underset{\sim}{G}[G] = G$ und

$$\underset{\sim}{\#}[G] = \{\check{p}[G] \mid \exists q \in G \, (\langle \check{p}, q \rangle \in \underset{\sim}{\#})\}$$

$$= \{p \in P \mid \exists q \in G \, (p \text{ und } q \text{ inkompatibel})\}$$

Offenbar ist $\underset{\sim}{G}[G] \cap \underset{\sim}{\#}[G] = \emptyset$. Also

$$\emptyset \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{G} \cap \underset{\sim}{\#} = \check{\emptyset}.$$

Aufgabe 9b

Wie wir aus der Teilaufgabe a) wissen, ist

$$\underset{\sim}{\#}[G] = \{p \in P \mid \exists q \in G \, (p \text{ und } q \text{ inkompatibel})\}$$

Beh 1: $\underset{\sim}{\#}[G]$ ist offen in $Fn(\omega, 2)$

Sei $p \in \underset{\sim}{\#}[G]$ und $r \geq p$. Da es ein $q \in G$ gibt mit $p \perp q$ und $r \geq p$ ist, folgt auch $r \perp q$. Also ist $\underset{\sim}{\#}[G]$ offen.

Beh 2: $\underset{\sim}{\#}[G]$ ist dicht in $Fn(\omega, 2)$

Sei $p \in P$ und $n \in \omega \setminus dom(p)$. Da $p_0 = p \cup \{\langle n, 0 \rangle\}$ und $p_1 = p \cup \{\langle n, 1 \rangle\}$ inkompatibel sind, gibt es ein $q \in G$ mit $q \perp p_0$ oder $q \perp p_1$. Das heisst entweder $p_0 \in \underset{\sim}{\#}[G]$ oder $p_1 \in \underset{\sim}{\#}[G]$.

Aufgabe 6b

Alternativ können wir auch mit der Bemerkung auf S. 352 unten argumentieren, dass $\underset{\sim}{y}$ (wie früher definiert) das Gewünschte erfüllt. Seien wiederum $p, q, r \in Fn(\omega, 2)$ paarweise inkompatibel. (Nötig nach Fact 15.9)

da G directed

- Ist $p \in G$, so sind $q, r \notin G$. Also gilt

$$\underset{\sim}{y}[G] = \{\emptyset[G]\} = \{\emptyset\} = x.$$

Also $p \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{y} = x$.

- Ist $q \in G$, so sind $p, r \notin G$. Also gilt

$$\underset{\sim}{y}[G] = \{\underset{\cdot}{x}[G]\} = \{x\} = \{\{\emptyset\}\} = y.$$

Also $q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{y} = y$.

- Ist $r \in G$, so sind $p, q \notin G$. Also gilt

$$\underset{\sim}{y}[G] = \{\emptyset[G], \underset{\cdot}{x}[G]\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = z.$$

Also $r \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{y} = r$.