Forcing – Serie 4 – Musterlösung

Aufgabe 11

Wie wir in den Aufgaben 2 und 3 gesehen haben, sind die Mengen

$$D_\pi := \{(s, T_s) \in \mathbb{P} \mid \forall f \in [T_s] \, (\pi \restriction [\operatorname{rng}(f) \setminus \operatorname{rng}(s)]^2 \text{ ist konstant}\}$$

und

$$B_n := \{(s, T_s) \in \mathbb{P} \mid |\operatorname{rng}(s)| > n\}$$

für alle $n \in \omega$ und alle Färbungen $\pi : [\omega]^2 \to 2$ in $\mathbf{V}$ offen dicht. Sei G ein $\mathbb{P}$-generischer Filter und sei

$$s_G := \bigcup \{s \mid \text{Es gibt einen Baum } T_s \text{ mit } (s, T_s) \in G\}.$$

Da G jedes B_n schneidet, gilt $\operatorname{rng}(s_G) \in [\omega]^\omega$ und da G jedes D_π schneidet, gilt, dass $\operatorname{rng}(s_G)$ bezüglich jeder Färbung $\pi : [\omega]^2 \to 2$ in $\mathbf{V}$ fast homogen ist.

Aufgabe 10a

Für jedes $g \in {}^{\omega}\omega \cap V$ sei

$$D_g := \{(s, T_s) \in \mathbb{P} \mid \forall f \in [T_s]\ \forall n \in \omega \setminus \mathrm{dom}(s)\ (g(n) < f(n))\}$$

Wir zeigen, dass diese Menge dicht ist. (Sie ist offenbar auch offen, aber Dichtheit reicht nach Fact 15.6.) Sei $(s, T_s) \in \mathbb{P}$ beliebig. Wir definieren

$$T := \{t \in T_s \mid \forall n \in \mathrm{dom}(t) \setminus \mathrm{dom}(s)\ (g(n) < f(n))\}.$$

Bemerke, dass (s, T) eine $\mathbb{P}$-Bedingung ist und $(s, T_s) \leq (s, T) \in D_g$ gilt.

Da G $\mathbb{P}$-generisch ist, gilt

$$G \cap D_g \neq \emptyset.$$

Sei

$$f_G := \bigcup \{s \mid \text{Es gibt ein } T_s, \text{ sodass } (s, T_s) \in G\}.$$

Da für jedes $n \in \omega$ die Menge

$$D_n = \{(s, T_s) \in \mathbb{P} \mid \mathrm{dom}(s) \geq n\}$$

dicht ist, folgt $\mathrm{dom}(f_G) = \omega$.

Sei $g \in {}^{\omega}\omega \cap V$. Dann gibt es ein $(s, T_s) \in G \cap D_g$. Ausserdem gilt $f_G \in [T_s]$.

Daher haben wir wie gewünscht

$$\forall n \in \omega \setminus \mathrm{dom}(s)\ (g(n) < f_G(n)).$$

Aufgabe 10c ← A10b kommt später

Für jedes $x \in \mathcal{U} \cap V$ sei

$$D_x := \{(s, T_s) \in \mathbb{P} \mid \forall f \in [T_s]\ (\mathrm{rng}(f) \setminus \mathrm{rng}(s) \subseteq x)\}.$$

Diese Menge ist dicht: Sei $(s, T_s) \in \mathbb{P}$ beliebig. Dann definieren wir

$$T := \{t \in T_s \mid \forall n \in \mathrm{dom}(t) \setminus \mathrm{dom}(s)\ (t(n) \in x)\}.$$

Bemerke, dass (s, T) eine $\mathbb{P}$-Bedingung ist (da $x \in \mathcal{U}$) und $(s, T) \in D_x$ ist.

D.h. D_x ist tatsächlich dicht. Sei wieder

$$f_G := \bigcup \{s \mid \text{Es gibt ein } T_s, \text{ sodass } (s, T_s) \in G\}.$$

Und sei $z_G := rng(f_G)$. Für jedes $x \in \mathcal{U} \cap V$ gibt es ein $(s, T_s) \in G \cap D_x$.

D.h. $z_G \setminus rng(s) \subseteq x \Rightarrow z_G \subseteq^* x$.

Aufgabe 10d

Dies folgt direkt aus Aufgabe 10c. Da $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist, ist für jedes $y \in [\omega]^\omega$ entweder $y \in \mathcal{U}$ (dann gilt $z_G \subseteq^* y$) oder $\omega \setminus y \in \mathcal{U}$ (dann gilt $z_G \subseteq^* \omega \setminus y$).

Aufgabe 10b

Sei $M := \{f \in {}^\omega\omega \mid f$ ist monoton wachsend und divergent$\}$. Für jedes $f \in M$ sei

$$\begin{aligned} i_f : \omega &\longrightarrow \omega \\ n &\longmapsto \min\{m \in \omega \mid f(m) \geq n\}. \end{aligned}$$

Bemerke, dass die Funktion

$$\begin{aligned} F : M &\longrightarrow M \\ f &\longmapsto i_f \end{aligned}$$

eine Bijektion ist. Ausserdem gilt für $f, g \in M$ mit $g <^* f$, dass es ein $n_0 \in \omega$ gibt mit

$$\forall k \geq n_0 \quad (g(k) < f(k))$$

$$\Rightarrow \quad \forall k \geq f(n_0) \quad \{m \in \omega \mid g(m) > k\} \subseteq \{m \in \omega \mid f(m) > k\}$$

$$\Rightarrow \quad \forall k \geq f(n_0) \quad \min\{m \in \omega \mid g(m) > k\} \geq \min\{m \in \omega \mid f(m) > k\}$$

$$\Rightarrow \quad i_g \geq^* i_f.$$

Sei nun

$$\hat{h} := \bigcup\{s \mid \text{Es gibt ein } T_s \text{, sodass } (s, T_s) \in G\}.$$

Diese Funktion erfüllt (siehe Aufgabe 10a) für jedes $g \in {}^\omega\omega \cap V$

$$\hat{h} >^* g$$

für jedes $g \in M$. Also folgt

$$i_{\hat{h}} \leq^* i_g$$

für jedes $g \in M$. Setze $h := \max\{0, i_{\hat{h}} - 1\}$. Dann folgt

$$h <^* i_g$$

für jedes $g \in M$. Da F bijektiv ist folgt auch

$$h <^* f$$

für jedes $f \in M$. Damit sind wir fertig.