Forcing - Serie 5 - Musterlösung

Aufgabe 12

Wir zeigen folgende Aussage:

Sei $\mathbb{P}=(P,\leq)$ ein Forcing, das κ-closed ist, sei G ein $\mathbb{P}$-generischer Filter über V, sei $X \in V$ und $f:\mu \to X$ eine Funktion in $V[G]$, wobei $\mu \in \kappa$ ist. Dann ist $f \in V$.

Um dies zu zeigen, modifizieren wir den Beweis von Lemma 15.14.

Sei $\mu \in \kappa$ und sei $f \in {}^{\mu}X$ eine Funktion in $V[G]$. Weiter sei $\underset{\sim}{f}$ ein $\mathbb{P}$-Name für f. Nach Theorem 15.10 (2) existiert ein $p \in G$ mit

$$p \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{f} \in {}^{\mu}\underset{\sim}{X}.$$

Nach Lemma 15.11 (b) gibt es ein $p_0 \geq p$ und ein $x_0 \in X$ mit

$$p_0 \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{f}(\check{0}) = \check{x}_0.$$

Ist $\lambda \in \mu$ eine Nachfolgerordinalzahl, d.h. $\lambda = \lambda'+1$ für ein $\lambda' \in \Omega$, so gibt es ein $p_\lambda \geq p_{\lambda'}$ und ein $x_\lambda \in X$ mit (siehe Lemma 15.11 (b))

$$p_\lambda \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{f}(\check{\lambda}) = \check{x}_\lambda.$$

Ist $\lambda \in \mu\setminus\{0\}$ eine Limesordinalzahl, wähle zunächst ein $\tilde{p}_\lambda \in P$ mit

$$\tilde{p}_\lambda \geq p_{\lambda'}$$

für jedes $\lambda' \in \lambda$. Dies ist möglich, da $\mathbb{P}$ κ-closed ist. Mit Lemma 15.11 (b) finden wir dann ein $p_\lambda \geq \tilde{p}_\lambda$ mit

$$p_\lambda \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{f}(\check{\lambda}) = \check{x}_\lambda$$

für ein $x_\lambda \in X$.

Sei nun $q \geq p_\lambda$ für jedes $\lambda \in \mu$. Da $\mathbb{P}$ κ-closed ist, finden wir solch eine Bedingung. Es gilt

$$q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{f} \in {}^{\omega}\check{X}$$

Wir haben also gezeigt, dass die Menge

$$D := \{q \geq p \mid q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{f} \in {}^{\omega}\check{X}\}$$

dicht oberhalb von $p \in G$ ist. Das heisst, $D \cap G \neq \emptyset$ und daher gilt

$$f \in {}^{\omega}X \cap V.$$

Aufgabe 13

Wir modifizieren die Beweise von Lemma 15.16 und 15.17.

Lemma 1: Erhält ein Forcing $\mathbb{P}$ Kofinalitäten $\geq \kappa$, wobei κ eine reguläre Kardinalzahl ist, so erhält $\mathbb{P}$ auch Kardinalzahlen $\geq \kappa$.

- Sei $\mu \geq \kappa$ eine reguläre Kardinalzahl in V. Das heisst, $\mu = |\mu|^V$ und $|\mu|^V = cf(\mu)^V$. Da $\mathbb{P}$ Kofinalitäten $\geq \kappa$ erhält, gilt $cf(\mu)^V = cf(\mu)^{V[G]}$. Weiter gelten $|\mu|^{V[G]} \leq |\mu|^V$ und $cf(\mu)^{V[G]} \leq |\mu|^{V[G]}$. Also
$$|\mu|^{V[G]} \leq |\mu|^V = cf(\mu)^V = cf(\mu)^{V[G]} \leq |\mu|^{V[G]}.$$
D.h. $|\mu|^{V[G]} = |\mu|^V$. Und μ ist auch in $V[G]$ eine reguläre Kardinalzahl.
- $\mu \geq \kappa$ ist eine Nachfolgerkardinalzahl in V. Nach Prop. 3.28 ist μ regulär und wir sind fertig.
- $\mu \geq \kappa$ ist eine nicht reguläre Limeskardinalzahl in V. ← insbesondere gilt also $\mu > \kappa$, da κ regulär ist. Die Menge $\{\lambda < \mu \mid \lambda \text{ ist Kardinalzahl} \geq \kappa\}$ ist kofinal in μ. Daher ist auch die Menge $\{\lambda^+ < \mu \mid \lambda \text{ ist Kardinalzahl} \geq \kappa\}$ kofinal in μ. Dies ist eine Menge regulärer Kardinalzahlen. Sei
$$\mathcal{C} := \{\eta < \mu \mid \eta \text{ regulär und } \geq \kappa\} \neq \emptyset. \quad \text{← da } \mu > \kappa$$
Dann gilt $\bigcup \mathcal{C} = \mu$. Da reguläre Kardinalzahlen erhalten werden, gilt
$$\mathcal{C}^V = \mathcal{C}^{V[G]}.$$
Das heisst, $\mu = \bigcup \mathcal{C}^{V[G]}$. Also ist μ eine Limeskardinalzahl in $V[G]$.

Lemma 2: Sei $\mathbb{P}$ ein Forcing, das κ-cc erfüllt, wobei κ eine reguläre Kardinalzahl ist. Dann erhält $\mathbb{P}$ Kardinalzahlen.

Wir zeigen, dass $\mathbb{P}$ Kofinalitäten $\geq \kappa$ erhält. Mit Lemma 1 folgt dann, dass $\mathbb{P}$ auch Kardinalzahlen $\geq \kappa$ erhält.

Sei $\mu \geq \kappa$ eine Kardinalzahl in V mit $cf^V(\mu) \geq \kappa$. Sei $\underset{\sim}{S}$ ein $\mathbb{P}$-Name für eine streng monoton wachsende kofinale Sequenz der Länge $\lambda = cf^{V[G]}(\mu)$ in $V[G]$. D.h. $\underset{\sim}{S}[G] : \lambda \to \mu$ mit $\bigcup\{S[G](\alpha) \mid \alpha \in \lambda\} = \mu$.

Es gibt eine $\mathbb{P}$-Bedingung $p \in G$ mit
$$p \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{S} \in {}^\lambda\mu \wedge \bigcup\{\underset{\sim}{S}(\alpha) \mid \alpha \in \lambda\} = \mu.$$
Für jedes $\alpha \in \lambda$ definieren wir
$$D_\alpha := \{q \geq p \mid \exists \gamma < \mu \, (q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{S}(\alpha) = \gamma)\} \in V.$$

Nach Fact 15.9 (b) ist D_α dicht oberhalb von p. Für jedes $\alpha \in \lambda$ definieren wir

$$Y_\alpha := \{\gamma \in \mu \mid \exists q \in D_\alpha (q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{S}(\check{\alpha}) = \check{\gamma})\}.$$

Für jedes $\alpha \in \lambda$ ist $Y_\alpha \subseteq \mu$ und $Y_\alpha \in V$. Da $\mathbb{P}$ κ-cc erfüllt, gilt ausserdem $|Y_\alpha| \leq \kappa$. Das ist so, weil für q_1, q_2 mit

$$(q_1 \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{S}(\check{\alpha}) = \check{\gamma}_1) \wedge (q_2 \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{S}(\check{\alpha}) = \check{\gamma}_2)$$

und $\gamma_1 \neq \gamma_2$ gilt $q_1 \perp q_2$.

Für jedes $\alpha \in \lambda$ sei A_α eine maximale Antikette in D_α. Nach Fact 15.6 (b) und Fact 15.7, gilt $G \cap A_\alpha \neq \emptyset$. D.h.

$$\forall \alpha \in \lambda (\underset{\sim}{S}[G](\alpha) \in Y_\alpha).$$

Sei $Y := \bigcup \{Y_\alpha \mid \alpha \in \lambda\}$. Dann ist $Y \subseteq \mu$ eine Menge in V mit $\bigcup Y = \mu$.

Da $\lambda \geq \kappa$ ist, folgt

$$|Y| \leq \lambda \cdot \kappa = \lambda.$$

D.h. $cf(\mu)^V \leq \lambda$. Also gilt

$$\lambda = cf(\mu)^{V[G]} \leq cf(\mu)^V \leq \lambda.$$

Also $cf(\mu)^{V[G]} = cf(\mu)^V$.