Forcing - Serie 6 - Musterlösung

Aufgabe 15

- Sei $ZFC^* \subseteq ZFC$ ein endliches Fragment. Falls nötig fügen wir endlich viele Axiome von ZFC zu ZFC^* hinzu, sodass wir ω und ω_1 definieren können.
- Nach dem Reflexionstheorem (Thm 16.2 (b)) gibt es eine endliche Menge $M \in V$, sodass M ZFC^* reflektiert (d.h. für jede Formel $\varphi \in ZFC^*$ gilt
$$\mathcal{M} \vDash \varphi \Leftrightarrow V \vDash \varphi.)$$
- Nach dem Mostowski Kollaps Theorem (Thm 16.3) gibt es eine transitive Menge $N \in V$, sodass $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N} = (N, \in)$ isomorph zueinander sind.
Da π siehe Thm 16.3 $: M \to N$ eine Bijektion ist, ist N abzählbar. Ausserdem gilt $\mathcal{N} \vDash ZFC^*$.
- Sei $\alpha_0 \in N$ mit
$$\mathcal{N} \vDash \text{"}\alpha_0 \text{ ist eine überabzählbare Ordinalzahl"}.$$
Dann muss α_0 in V abzählbar sein, da N abzählbar und transitiv ist.

Aufgabe 16b

- Zeigen wir zunächst (3): Sei $\lambda < \kappa$ eine Kardinalzahl. Da nach Voraussetzung $V_\kappa \vDash ZFC$, ist $\mathcal{P}(\lambda) \in V_\kappa$. Ausserdem können wir $\mathcal{P}(\lambda)$ in V_κ wohlordnen und finden einen Ordnungstyp $\beta \in V_\kappa$. Es gilt $|\beta| \geq 2^\lambda$. Da V_κ nach Fact 3.11 transitiv ist, folgt $2^\lambda \in V_\kappa$. Also gilt insbesondere $2^\lambda < \kappa$.
- Nun zeigen wir, dass (1) gilt. Angenommen $\kappa = \lambda^+$ für eine Kardinalzahl λ. Da $\lambda < \kappa$, folgt (mit (3)) $\kappa = \lambda^+ \leq 2^\lambda \in V_\kappa \Rightarrow \kappa \in V_\kappa$. Aber $\kappa \notin V_\kappa$. Also haben wir einen Widerspruch und daher ist κ eine Limeskardinalzahl

Aufgabe 17

Sei $V \models ZFC$ und sei $M_0 \in V$ eine abzählbare Menge mit $M_0 \models ZFC$. Weiter sei $\alpha_0 := \bigcup(\Omega^V \cap M_0)$. Dann ist $\alpha_0 \in \Omega^V$. Da $M \models ZFC$ ist, gibt es eine abzählbare Menge $M_1 \in M_0$ mit $M_1 \models ZFC$. Sei

$$\alpha_1 = \bigcup(\Omega^V \cap M_1).$$

Es gilt $\alpha_0 \ni \alpha_1$. Machen wir so weiter, erhalten wir eine unendlich lange absteigende Folge von Ordinalzahlen. Das widerspricht dem Fundierungsaxiom.

Aufgabe 16a

- 0. The Axiom of Empty Set

$\emptyset \in V_0 \Rightarrow \emptyset \in V_\kappa$.

- 1. The Axiom of Extensionality

Seien $x, y \in V$ und angenommen $x \neq y$. Das heisst, es gibt (oBdA) ein $z \in x \setminus y$, $z \in V$. Da (nach Fact 3.11) V_κ transitiv ist, folgt $x \subseteq V_\kappa$ und $y \subseteq V_\kappa$. Das heisst, V_κ kennt z (d.h. $z \in V_\kappa$) und daher ist $x \neq y$ in V_κ.

kummulative Hirarchie

- 2. The Axiom of Pairing

Seien $x, y \in V_\kappa$. Es gibt $\alpha_x, \alpha_y \in \kappa$ mit $x \in V_{\alpha_x}$ und $y \in V_{\alpha_y}$. OBdA sei $\alpha_x \leq \alpha_y$. Dann sind $x, y \in V_{\alpha_y}$ und daher $\{x, y\} \in V_{\alpha_y + 1} \subseteq V_\kappa$.

- 3. The Axiom of Union

Sei $x = \{y_z \mid z \in I\} \in V_\kappa$. Sei $\alpha \in \kappa$ mit $x \in V_\alpha$. Es gilt, da V_α transitiv ist,

Bemerke κ ist Limesordinalzahl

$$\forall z \in I \; (y_z \subseteq V_\alpha).$$

D.h. $\bigcup x = \bigcup_{z \in I} y_z \in V_{\alpha+1}$.

- 4. The Axiom of Infinity

Es gilt (siehe Fact 3.11): $\omega \in V_{\omega+1} \subseteq V_\kappa$. Also gilt auch dieses Axiom.

- 5. The Axiom of Schema Separation

Sei $x \in V_\kappa$. D.h. es gibt ein $\alpha \in \kappa$ mit $x \in V_\alpha$. Sei $y \subseteq x$. Es gilt $y \subseteq V_\alpha$, da V_α transitiv ist, also $y \in V_{\alpha+1}$. Also gilt auch dieses Axiom.

- 6. The Axiom of Power Set

Sei $x \in V_\kappa$ und sei $\alpha \in \kappa$ mit $x \in V_\alpha$. Es gilt $x \subseteq V_\alpha$. Also $\mathcal{P}(x) \subseteq V_{\alpha+1}$ und daher $\mathcal{P}(x) \in V_{\alpha+2}$. Also $\mathcal{P}(x) \in V_\kappa$.

- 7. The Axiom of Schema Replacement ← einziges Axiom für das man Unerreichbarkeit braucht (sonst reicht $\kappa > \omega$ und Limesordinalzahl)

Sei $A \in V_\kappa$ und sei $F: A \to V_\kappa$ eine Klassenfunktion. Für jedes $x \in A$ sei $\alpha_x \in \kappa$ die kleinste Ordinalzahl, sodass $F(x) \in V_{\alpha_x}$. Es gilt $|A| < \kappa$ (← transfinite Induktion). Also

$$\alpha := \bigcup_{x \in A} \alpha_x \in \kappa. \quad \leftarrow \kappa \text{ ist unerreichbar}$$

Somit ist $\{F(x) \mid x \in A\} \in V_\alpha \subseteq V_\kappa$.

- 8. The Axiom of Foundation

$V = \bigcup_{\alpha \in \Omega} V_\alpha$ erfüllt das Fundierungsaxiom. Da $V_\kappa \subseteq V$ ist (und V_κ ist transitiv), erfüllt V_κ das Fundierungsaxiom ebenfalls.

- 9. The Axiom of Choice

Sei $\mathcal{A} \in V_\kappa$ eine Familie von paarweise disjunkten Mengen und sei $B \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ eine Menge in V mit

$$\forall a \in \mathcal{A} \ (|a \cap B| = 1).$$

Es gilt $|\mathcal{A}| < \kappa$. Also folgt (analog zum Axiom 7), dass $B \in V_\kappa$ ist.

Aufgabe 14

Ist sehr ähnlich wie Aufgabe 16a. Bemerke, dass $\omega \subseteq V_\omega$ aber $\omega \notin V_\omega$ ist. Das Unendlichkeitsaxiom gilt nicht.