Forcing – Serie 7 – Musterlösung

Aufgabe 18

Die Menge ω_1 ist die leere Menge in $\mathcal{M} = (M = \{\omega_1\}, \in)$. Denn für jedes $z \in M$ gilt $z = \omega_1$, also $z \notin \omega_1$.

Aufgabe 19

Sei $M := \{\emptyset, \{\omega_1\}\}$ und $\mathcal{M} = (M, \in)$. Offenbar gilt $\emptyset \neq \{\omega_1\}$ aber für jedes $z \in M$ gilt $z \notin \emptyset$ und $z \notin \{\omega_1\}$

Aufgabe 20

Sei $\mathcal{M} = (M = \omega, \in)$. Beispielsweise gilt $\{0, 2\} \notin M$. Also ist das Paarmengenaxiom nicht erfüllt. Aber das Extensionalitätsaxiom gilt: Seien $m, n \in \omega$ mit $m \neq n$. Dann gilt entweder $n \in m$ oder $m \in n$.

Aufgabe 21

Sei $x_0 := \omega$ und für jedes $n \in \omega$ sei $x_{n+1} := x_n \cup \{x_n\}$. Sei

$$\mathcal{M} := (\omega \cup \{x_n \mid n \in \omega\}, \in).$$

Für jedes $n \in \omega$ gilt dann $\mathcal{P}(x_n) = x_{n+1}$ und $\mathcal{P}(n) = n+1$.

Aufgabe 22

- Axiom der leeren Menge

  Es gilt $\emptyset^M = \omega + 1$

- Extensionalitätsaxiom

  Seien $n, m \in \omega$ mit $n \neq m$. Dann gilt entweder

  $$\omega + n + 1 \in \omega + m + 1 \text{ oder } \omega + n + 1 \ni \omega + m + 1.$$

  Also gilt auch dieses Axiom in $\mathcal{M}$.

- Vereinigungsaxiom

  Für jedes $n \in \omega \setminus \{0\}$ gilt $\bigcup \omega + n + 1 = \omega + n \in M$. Ausserdem gilt $\bigcup \omega + 1 = \omega + 1$, da $\omega + 1 = \emptyset^M$ ist. Also gilt auch dieses Axiom

- Unendlichkeitsaxiom

Jedes $\omega + n + 1 \in M$ enthält (in M) nur endlich viele Elemente. In M sind also alle Mengen endlich. Dieses Axiom gilt also nicht.