Forcing - Serie 8 - Musterlösung

Aufgabe 23

Es gilt $\mathfrak{c} = 2^\omega$. Also erhalten wir

$$\mathfrak{c} = 2^\omega \leq \omega_1^{\ \omega} \leq \mathfrak{c}^\omega = (2^\omega)^\omega = 2^{\omega \cdot \omega} = 2^\omega = \mathfrak{c}.$$

Dabei haben wir mehrmals Fact 3.24 benutzt.

Aufgabe 24 a

Wir definieren $\kappa := 2^\mu$. Nach Theorem 3.18 gilt $2^\mu > \mu$. Wir erhalten

$$\kappa^\omega = (2^\mu)^\omega = 2^{\mu \cdot \omega} \underset{\mu \geq \omega,\ \text{Thm } 3.25}{=} 2^\mu = \kappa.$$

Aufgabe 24 b

Wir definieren $\kappa := 2^\lambda$ und erhalten

$$\kappa^\lambda = (2^\lambda)^\lambda = 2^{\lambda \cdot \lambda} \overset{\text{Thm } 3.25}{=} 2^\lambda = \kappa.$$

Aufgabe 24 c

Sei $\mu = \omega_\alpha$ und sei $\kappa := \omega_{\alpha+\omega}$. Dann gilt $cf(\kappa) = \omega$ und nach Korollar 3.30 gilt

$$\kappa < \kappa^{cf(\kappa)} = \kappa^\omega.$$

Aufgabe 26

Es gilt

$$\sum_{\mu \in \kappa} \kappa^\mu \geq \kappa^\lambda \geq 2^\lambda.$$

Umgekehrt gilt auch

$$\sum_{\mu \in \kappa} \kappa^\mu \leq \kappa \cdot \kappa^\lambda = \kappa^\lambda \overset{\kappa = \lambda^+ \leq 2^\lambda}{\leq} (2^\lambda)^\lambda = 2^{\lambda \cdot \lambda} = 2^\lambda.$$

Aufgabe 27

Sei $f \in {}^\omega\kappa$. Da $cf(\kappa) > \omega$ ist, gilt $\bigcup \mathrm{im}(f) =: \lambda_f \in \kappa$. Das heisst also $f \in {}^\omega(\lambda_f + 1)$. Also folgt

$$\kappa \leq \kappa^\omega = |{}^\omega\kappa| \leq \sum_{\lambda \in \kappa} |{}^\omega\lambda| = \sum_{\lambda \in \kappa} \lambda^\omega \leq \sum_{\lambda \in \kappa} \kappa \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa$$

$\Rightarrow \kappa = \kappa^\omega.$

Aufgabe 25

Es gilt
$$c\cdot\omega_n = 2^{\omega}\cdot\omega_n \leq 2^{\omega}\cdot\omega_n^{\omega} = (2\cdot\omega_n)^{\omega} = \omega_n^{\omega}.$$

Um die andere Ungleichung zu zeigen, machen wir eine Fallunterscheidung:

1. Fall: $c \geq \omega_n$

Es gilt $\omega_n^{\omega} \leq c^{\omega} = (2^{\omega})^{\omega} = 2^{\omega\cdot\omega} = 2^{\omega} = c = c\cdot\omega_n$.

2. Fall: $c < \omega_n$

Es gilt $c = \omega_m$ für ein $m<n$. Ziel ist es zu zeigen, dass
$$\omega_{m+k} = \omega_{m+k}^{\omega} \qquad (\text{Offenbar ist } c\cdot\omega_{m+k} = \omega_{m+k})$$
ist für alle $k\in\omega$. Für $k=0$ gilt dies nach Fall 1. Sei $k>0$ und die Aussage gelte für alle $l<k$. Da ω_{m+k} eine Nachfolgerkardinalzahl ist, also regulär ist, gilt $cf(\omega_{m+k}) = \omega_{m+k} > \omega$. Also sind alle Voraussetzungen von Aufgabe 27 erfüllt und wir erhalten wie gewünscht
$$\omega_{m+k} = \omega_{m+k}^{\omega}.$$