Forcing – Serie 9 – Musterlösung

Aufgabe 28b

Sei $\mathbb{S} = (\mathcal{S}, \leq)$ Sacks-Forcing. Sei G ein $\mathbb{S}$-generischer Filter über dem Grundmodell $V \models ZFC$. Weiter sei $f \in {}^{\omega}\omega \cap V[G]$. Sei $S_0 \in G$ mit $\underbrace{S_0 \Vdash_{\mathbb{S}} \underset{\sim}{f} \in {}^{\omega}\omega}_{(*)}$. (existiert gemäss Forcing-Thm)

Wir zeigen, dass die Menge

$$D_{\underset{\sim}{f}} := \{S \in \mathcal{S} \mid S \geq S_0 \text{ und } \exists g \in {}^{\omega}\omega \cap V\ (S \Vdash_{\mathbb{S}} g \overset{*}{>} \underset{\sim}{f})\}$$

dicht oberhalb von S_0 ist. Denn dann ist $D \cap G \neq \emptyset$ und nach dem Forcing-Theorem gilt dann $V[G] \models g \overset{*}{>} f$ und wir sind fertig.

Sei $\mathcal{S} \ni S \geq S_0$. Sei $m_0 \in \omega$ kleinst möglich, sodass es ein $T_0 \geq S$ gibt mit

$$T_0 \Vdash_{\mathbb{S}} \underset{\sim}{f}(0) < m_0.$$

[Erklärung: Angenommen $\forall m_0 \in \omega\, \forall T_0 \geq S\ (T_0 \not\Vdash_{\mathbb{S}} \underset{\sim}{f}(0) < m_0)$. D.h. (Def 15.8 c) $\forall m_0 \in \omega\ (S \Vdash_{\mathbb{S}} \underset{\sim}{f}(0) \geq m_0)$. Das heisst $S \Vdash_{\mathbb{S}} \underset{\sim}{f}(0) \notin \omega$. Dies widerspricht aber $(*)$.

Seien $s_0, s_1 \in T_0$, sodass ein $k \in \omega$ existiert mit $s_0(k) = 0$ und $s_1(k) = 1$. Solche zwei Elemente von T_0 gibt es, da T_0 ein perfekter Baum ist. Sei $m_1 \in \omega$ kleinst möglich, sodass es $\mathbb{S}$-Bedingungen $T_{0,0} \geq T_0[s_0]$ und $T_{0,1} \geq T_1[s_0]$ gibt mit

$$T_{0,i} \Vdash_{\mathbb{S}} \underset{\sim}{f}(1) < m_1$$

für jedes $i \in \{0,1\}$. Sei $T_1 := T_{0,0} \cup T_{0,1}$. Dann gilt

$$T_1 \Vdash_{\mathbb{S}} \underset{\sim}{f}(1) < m_1$$

[Erklärung: Angenommen $T_1 \not\Vdash_{\mathbb{S}} \underset{\sim}{f}(1) < m_1$. Dann gibt es eine Bedingung $T' \geq T_1$ mit

$$T' \Vdash_{\mathbb{S}} \underset{\sim}{f}(1) \geq m_1. \qquad (*)$$

Es gibt ein $T'' \in \mathcal{S}$ mit $T'' \geq T'$ und $T'' \geq T_{0,0}$ oder $T'' \geq T_{0,1}$. Es gilt also

$$T'' \Vdash_{\mathbb{S}} \underset{\sim}{f}(1) < m_1.$$

Das widerspricht aber $(*)$.

Für jedes $i \in \{0,1\}$ seien $s_{i,0}, s_{i,1} \in T_{0,i}$ mit $s_{i,0} \geq s_i$ und $s_{i,1} \geq s_i$, sodass es für jedes $i \in \{0,1\}$ ein $k_i \in \omega$ gibt mit

$$s_{i,0}(k_i) = 0 \text{ und } s_{i,1}(k_i) = 1.$$

Sei $m_2 \in \omega$ kleinst möglich, sodass es für alle $i,j \in \{0,1\}$ $T_{0,i,j} \geq T_{0,i}[s_{i,j}]$ gibt mit

$$T_{0,i,j} \Vdash_{\mathbb{S}} \dot{f}(2) < m_2 .$$

Sei $T_2 = \bigcup_{i,j \in \{0,1\}} T_{0,i,j}$. Dann gilt $T_2 \Vdash_{\mathbb{S}} \dot{f}(2) < m_2$. Analog können wir für jedes $n \in \omega$ eine $\mathbb{S}$-Bedingung T_n definieren. Sei

$$T := \bigcap_{n \in \omega} T_n .$$

Nach Konstruktion ist T eine $\mathbb{S}$-Bedingung. Ausserdem gilt $T \geq T_n$ für alle $n \in \omega$. Also folgt

$$T \Vdash_{\mathbb{S}} \dot{f}(k) < m_k .$$

Sei $g(k) = m_k$ für jedes $k \in \omega$. Es gilt $g \in {}^{\omega}\omega \cap V$ und

$$T \Vdash_{\mathbb{S}} g \geq^* \dot{f} .$$

<u>Aufgabe 29b</u>

Sei $f \in {}^{\omega}\omega \cap V$ und sei

$$D_f := \{T \in \mathbb{M} \mid \forall s \in \mathrm{split}(T)\, \forall n \in \mathrm{next}_T(s)\, (f(|s|) < n)\}.$$

Diese Menge ist dicht: Sei $T \in \mathbb{M}$ beliebig. Sei $T_{-1} = T$. Für jedes $k \in \omega$ definieren wir

$$T_k := \{t \in T_{k-1} \mid t \leq s \text{ für ein } s \in \mathrm{split}_k(T) \text{ oder } t \geq s \text{ für ein } s \in \mathrm{split}_k(T) \text{ und } t(|s|) > f(|s|)\}.$$

Sei $S := \bigcap_{k \in \omega} T_k$. Nach Konstruktion ist $S \in D_f$ und $S \geq T$.

Sei G ein $\mathbb{M}$-generischer Filter. Wir definieren

$$g := \bigcup \bigcap G \in {}^{\omega}\omega \cap V[G] \quad \text{(eine Miller-real)}$$

Da G jedes D_f schneidet, folgt

$$g \not\leq^* f .$$

Also ist g unbounded.

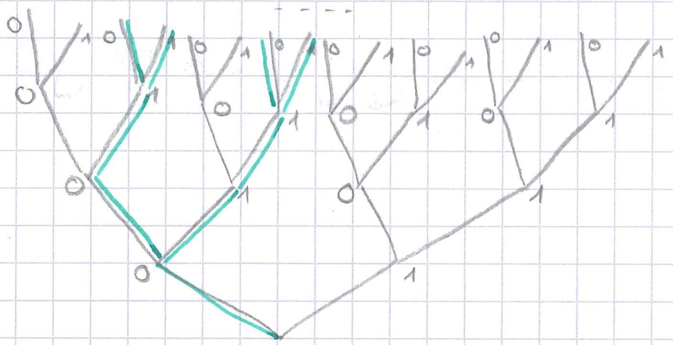
Aufgabe 28a

Für jede 01-Folge $x = (x_n)_{n\in\omega}$ sei T_x folgender perfekter Baum:

$$T_x := \{t \in \bigcup_{n\in\omega} {}^n2 \mid \forall k\in\omega\,(2k \in \mathrm{dom}(t) \Rightarrow t(2k) = x_k\}.$$

Es gibt c viele solche Bäume und diese sind paarweise inkompatibel.

Zur Veranschaulichung noch ein Bild:



– ganzer Baum $\bigcup_{n\in\omega} {}^n2$

– T_x für $x = \langle 0, 1, \dots \rangle$

Aufgabe 29a

Für jede Folge $x = (x_n)_{n\in\omega}$ mit $x_n \in \omega$ für jedes $n \in \omega$ definieren wir

$$T_x = \{t \in \bigcup_{n\in\omega} {}^n\omega \mid \forall k\in\omega\,(2k \in \mathrm{dom}(t) \Rightarrow t(2k) = x_k)\}.$$

Es gibt c solche superperfekte Bäume. Diese sind paarweise inkompatibel.