Forcing – Serie 11 – Musterlösung

Aufgabe 30

Sei $\mathcal{U}$ ein Ramsey-Ultrafilter, sei $T \subseteq {}^{<\omega}2$ ein perfekter Baum und sei $f: T \to 2$ eine Funktion. Für jedes $s \in T$ definieren wir

$$E_s := \{\ell \in \omega \mid \exists t_0, t_1 \in T[s](\ell)\,(t_0 \neq t_1 \wedge f(t_0) = f(t_1) = 0)\}.$$

Dabei ist $T[s](\ell) = \{t \in T[s] \mid \mathrm{dom}(t) = \ell\}$. Es ist also die Menge aller Levels ℓ auf denen es zwei verschiedene Fortsetzungen von s gibt, die von f beide auf 0 abgebildet werden. Es gibt zwei Fälle:

1. Fall: $\forall s \in T\,(E_s \in \mathcal{U})$

Für jedes $n \in \omega$ sei

$$A_n := \bigcap \{E_s \mid s \in T \wedge \mathrm{dom}(s) = n\}.$$

Da jedes A_n der Schnitt von endlich vielen Elementen aus $\mathcal{U}$ ist, ist auch $A_n \in \mathcal{U}$. Sei $\pi: [\omega]^2 \to 2$, wobei für $n < m$

$$\pi(\{m,n\}) := \begin{cases} 0 & \text{wenn } m \in A_n \\ 1 & \text{wenn } m \notin A_n. \end{cases}$$

Da $\mathcal{U}$ ein Ramsey-Ultrafilter ist, gibt es ein $x_0 \in \mathcal{U}$ mit $\pi|_{[x_0]^2}$ konstant. Es gilt sogar

$$\pi|_{[x_0]^2} \equiv 0.$$

Warum? Für jedes $n \in \omega$ ist $x_0 \cap A_n \in \mathcal{U}$. Sei $n \in x_0$ und sei $m > n$ mit $m \in x_0 \cap A_n$. Dann gilt $\pi(\{n,m\}) = 0$. Da $\pi|_{[x_0]^2}$ konstant ist, folgt also $\pi|_{[x_0]^2} \equiv 0$.

Wir nummerieren x_0 durch. Sei also $x_0 = \{\ell_i \mid i \in \omega\}$. Wähle ein

$$s_\emptyset \in T(\ell_0).$$

Es gilt $\pi(\{\ell_0, \ell_1\}) = 0$. Also ist $\ell_1 \in A_{\ell_0}$. Das heisst wiederum es gibt zwei verschiedene $t_0, t_1 \in T[s_\emptyset](\ell_1)$ mit $f(t_0) = f(t_1) = 0$.

Definiere

$$\underset{\substack{\parallel \\ s_{\langle 0\rangle}}}{s_{\emptyset^\frown 0}} := t_0 \text{ und } s_{\emptyset^\frown 1} := t_1.$$

Analog können wir Elemente

$$s_{\langle 0,0\rangle} \succ s_{\langle 0\rangle},\ s_{\langle 0,1\rangle} \succ s_{\langle 0\rangle},\ s_{\langle 1,0\rangle} \succ s_{\langle 1\rangle},\ s_{\langle 1,1\rangle} \succ s_{\langle 1\rangle}$$

finden mit $f(s_{\langle i,j\rangle}) = 0$ für alle $i, j \in \{0,1\}$.

Fahren wir so fort, haben wir am Schluss für jedes $t \in {}^{<\omega}2$ ein s_t definiert.
Sei

$$T' = \{s \in T \mid s \leq s_t \text{ für ein } t \in {}^{<\omega}2\} \subseteq T.$$

Nach Konstruktion gilt für alle $\ell \in x_0$ und alle $s \in T'(\ell)$, $f(s) = 0$.

2. Fall: $\exists s_0 \in T (E_{s_0} \notin \mathcal{U})$

Wir definieren eine streng monoton wachsende Folge $(k_n)_{n\in\omega}$ wie folgt:
Sei $k_0 := 0$ und für jedes $n \in \omega$ sei $k_{n+1} \in \omega$ kleinst möglich, sodass jedes $t \in T(k_n)$ zwei verschiedene Fortsetzungen in $T(k_{n+1})$ hat. Betrachte die Partition $\{[k_n, k_{n+1}[\mid n \in \omega\}$ von ω. Da $\mathcal{U}$ als Ramsey-Ultrafilter auch ein Q-point ist, gibt es ein $y_0 \in \mathcal{U}$ mit

$$\forall n \in \omega \, (|[k_n, k_{n+1}[\cap y_0| = 1)$$

Sei $\{\ell_i \mid i \in \omega\}$ eine Abzählung von $\underbrace{y_0}_{\in \mathcal{U}} \cap \underbrace{(\omega \setminus E_{s_0})}_{\in \mathcal{U}} \in \mathcal{U}$.

OBdA sei $\{\ell_{2i} \mid i \in \omega\} \in \mathcal{U}$. Wir konstruieren einen Baum T' wie im 1. Fall: Wähle $s_\emptyset \in T(\ell_0)$. Nimm an, für ein $n \in \omega$ und jedes $t \in {}^n 2$ haben wir bereits ein $s_t \in T(\ell_{2n})$ gewählt. Nach Konstruktion hat s_t in $T(\ell_{2n+2})$ mindestens 4 verschiedene Fortsetzungen. Da $\ell_{2n+2} \notin E_{s_0}$ ist gibt es sicher $t_0, t_1 \in T(\ell_{2n+2})$ mit $s_t \leq t_0$, $s_t \leq t_1$ und

$$f(t_0) = f(t_1) = 1.$$

Sei

$$T' = \{s \in T \mid \exists t \in {}^{<\omega}2 \, (s \leq t)\}.$$

Dies ist ein perfekter Baum und f eingeschränkt auf $\bigcup_{\ell \in \{\ell_{2n} \mid n \in \omega \setminus \{0\}\}} T'(\ell_{2n})$ ist konstant gleich 1.

Aufgabe 31 Sei $\mathbb{S} = (\mathcal{S}, \leq)$ Sacks-Forcing.

Sei $\mathcal{U}$ ein Ramsey-Ultrafilter im Grundmodell V und sei G ein $\mathbb{S}$-generischer Filter über V. Da Sacks-Forcing nach Serie 9/10/A28b ω^{ω}-bounding ist und da Sacks-Forcing nach Lemma 23.1 proper ist, reicht es nach Lemma 21.10 zu zeigen, dass für jeden P-point $\mathcal{U}$ im Grundmodell V der Filter, der durch $\mathcal{U}$ in $V[G]$ generiert wird, ein Ultrafilter ist. Wir zeigen also:

Für jedes $y \subseteq \omega$ in $V[G]$ gibt es ein $x \in \mathcal{U} \cap V$ mit

$$x \subseteq y \quad \text{oder} \quad x \cap y = \emptyset.$$

Ist $|y| < \omega$, so sind wir fertig. Angenommen $y \in [\omega]^{\omega}$. Sei $\underset{\sim}{y}$ ein $\mathbb{S}$-Name für y. Wir zeigen, dass die Menge

$$D := \{ S \in \mathcal{S} \mid \exists x \in \mathcal{U} \; (S \Vdash_{\mathbb{S}} x \subseteq \underset{\sim}{y} \vee x \cap \underset{\sim}{y} = \emptyset) \}$$

dicht ist. Sei dazu $R \in \mathcal{S}$ beliebig. Dann gibt es eine streng monoton wachsende Folge $(\ell_k)_{k \in \omega} \subseteq \omega \setminus \{0\}$ und ein $T' \geq R$, sodass

1. $|T'(\ell_k)| = 2^k$
2. $\forall s \in T'(\ell_k) \; (T'[s] \Vdash_{\mathbb{S}} k \in \underset{\sim}{y}$ oder $T'[s] \Vdash_{\mathbb{S}} k \notin \underset{\sim}{y})$.

Warum? Wir definieren den Baum T' und die Folge $(\ell_k)_{k \in \omega}$ induktiv. Sei $\ell_0 := 1$. Sei $s_0 \in T(\ell_0)$ und definiere $T_0 := T[s_0]$. Angenommen wir haben bereits einen Baum T_n definiert mit $|T_n(\ell_n)| = 2^n$. Sei t_h, $h \in 2^n$ eine Abzählung von $T_n(\ell_n)$. Sei $S_{-1} := T_n$ und für jedes $h \in 2^n$ wähle mit Fact 15.9 (b) eine $\mathbb{S}$-Bedingung S_h mit

1) $S_h \geq S_{h-1}$

2) $S_h(\ell_n) = S_{h-1}(\ell_n)$

3) $S_h[t_h]$ entscheidet φ_n

wir wollen zudem, dass jedes t_h min. zwei Fortsetzungen in $\tilde{T}_{n+1}(\ell_{n+1})$ hat.

wobei $\varphi_n \equiv n \in \underset{\sim}{y}$. Sei $\tilde{T}_{n+1} := S_{2^n-1}$. Wähle ℓ_{n+1} sodass $|\tilde{T}_{n+1}(\ell_{n+1})| \geq 2^{n+1}$. Schneide den Baum so, dass für den resultierenden Baum $T_{n+1} \geq \tilde{T}_{n+1}$ gilt $|T_{n+1}(\ell_{n+1})| = 2^{n+1}$. Ausserdem soll jedes t_h mindestens zwei Fortsetzungen in $T_{n+1}(\ell_{n+1})$ haben. $T' = \bigcap_{n \in \omega} T_n$ tut das Gewünschte.

Wir definieren wie folgt eine Färbung $f: T' \to 2$. Ist $s \in T'(\ell)$ für $\ell_k \leq \ell < \ell_{k+1}$, so ist

$$f(s) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } T'[s] \Vdash_{\mathbb{S}} k \in \underset{\sim}{y} \\ 1 & \text{wenn } T'[s] \Vdash_{\mathbb{S}} k \notin \underset{\sim}{y} \end{cases}$$

Weiter sei $f(s) = 0$ für alle $s \in T'[\ell_0]$.

Nach Aufgabe 30 ist $\mathcal{U}$ ein Halpern-Läuchli-Ultrafilter. Das heisst es gibt ein $T \geq T'$ in $\mathbb{S}$ und ein $x \in \mathcal{U}$, sodass f auf

$$A := \bigcup_{k \in x} T(k)$$

konstant ist. Ist f auf A konstant gleich Null, so gilt

$$\tilde{T} \Vdash_{\mathbb{S}} x \subseteq \underset{\sim}{y} \quad \text{für ein } \tilde{T} \geq T$$

Ist f auf A konstant gleich Eins, so gilt

$$\tilde{T} \Vdash_{\mathbb{S}} x \cap \underset{\sim}{y} = \emptyset \quad \text{für ein } \tilde{T} \geq T.$$

Also ist y oder $\omega \setminus y$ im Filter, der von $\mathcal{U}$ generiert wird. Somit ist der Filter, der von $\mathcal{U}$ generiert wird in $V[G]$ ein Ultrafilter.