# 8 Die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese

## 8.1 Forcings die keine neuen reellen Zahlen generieren

[Erinnerung: Ultrafilter-Forcing $\mathbb{U}$]

Def. Eine Forcing p.o. (FPO) $\mathbb{P} = (P, \leq)$ ist σ-closed falls für jede Sequenz $p_0 \leq p_1 \leq \ldots \leq p_n \leq \ldots$ $(n \in \omega)$ von $\mathbb{P}$-Bedingungen eine Bedingung $q \in P$ ex. mit $q \geq p_n$ für alle $n \in \omega$.

Faktum 8.1 (15.13) Ultrafilter-Forcing $\mathbb{U}$ ist σ-closed.

Bew. Äquivalent zu $\mathfrak{p} \geq \omega_1$; $x_0 \overset{*}{\supseteq} x_1 \overset{*}{\supseteq} \ldots$ hat einen pseudo-Durchschn. ⊣

Lemma 8.2 (15.14) Sei $\mathbb{P} = (P, \leq)$ eine σ-closed FPO, G ein $\mathbb{P}$-gen. Filter über V, X eine Menge in V, und $f : \omega \to X$ eine Funktion in $V[G]$, d.h. $V[G] \models f \in {}^\omega X$.
Dann ist $f \in V$.

Beweis: Sei $f \in {}^\omega X$ eine Fkt. in $V[G]$ und sei $\underset{\sim}{f}$ ein $\mathbb{P}$-Name für $f$. Mit dem Forcing Theorem 7.8 (2) ex. ein $p \in P \cap G$ sodass
$$p \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{f} \in {}^\omega \underset{\sim}{X}.$$

Wir zeigen, dass es für jedes $p' \geq p$ eine Fkt. $g : \omega \to X$ in V und ein $q \geq p'$ gibt mit $q \Vdash_{\mathbb{P}} \check{g} = \underset{\sim}{f}$ (eigentlich $\underset{\sim}{g} = \underset{\sim}{f}$).

Daraus folgt, dass die Menge der Bed. $q \in P$ mit
$$q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{f} \in {}^\omega \dot{X}$$
dicht ist oberhalb von p. Somit ist dann $\underset{\sim}{f}[G] \in {}^\omega X$.
[Unterschied zwischen ${}^\omega \dot{X}$ und ${}^\omega \underset{\sim}{X}$.]

Mit Lemma 7.9.(b) finden wir ein $p_0 \geq p'$, sodass $p_0 \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{f}(\overset{\circ}{0}) = \overset{\circ}{x}_0$ für ein $x_0 \in X$, und für $n \in \omega$ sei $p_{n+1} \geq p_n$, sodass $p_{n+1} \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{f}(\overset{\circ}{n+1}) = \overset{\circ}{x}_{n+1}$ (für ein $x_{n+1} \in X$).

- Beachte, dass mit Lem. 7.9.(b), $p_0$ und $p_{n+1}$ existieren und dass die Konstr. in V ausgeführt werden kann.

- Sei nun $q \geq p_n$ (für alle $n \in \omega$). Dann ex. für jedes $n \in \omega$ ein $x_n \in X$ mit $q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{f}(\overset{\circ}{n}) = \overset{\circ}{x}_n$, d.h.

$$q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{f} \in {}^{\omega}\overset{\circ}{X}.$$

$\dashv$

<u>Proposition 8.3</u> (L5.15) Ist G $\mathbb{U}$-gen. über V, dann ist G ein neuer Ramsey-Ultrafilter in V[G].

<u>Beweis:</u> Für jedes $z \in [\omega]^\omega \cap V$ mit $|\omega \setminus z| = \omega$ ist $\{z, \omega\setminus z\}$ eine max. Antikette. Weiter ist $\mathbb{U}$ $\sigma$-closed und jede 2-Färbung $\pi: [\omega]^2 \to 2$ lässt sich als $r \in {}^\omega 2$ codieren...

$\dashv$

## <u>8.2 Forcings, die keine Kardinalzahlen kollabieren</u>

Erinnerung: $\mathbb{C}_\kappa = (\mathrm{Fn}(\kappa\times\omega), 2) \subseteq)$

Sei $\mathbb{P}$ eine FPO und sei G ein $\mathbb{P}$-gen. Filter über V. Weiter sei $\kappa$ eine unendliche Kardinalzahl in V. Nach Def. ist $\kappa$ eine Ordinalzahl und weil V[G] und V dieselben Ordinalzahlen enthält, ist $\kappa$ auch eine Ordinalzahl in V[G]. Ist $\kappa$ auch eine Kardinalzahl in V[G]?

in V: Es ex. keine Bijektion $\kappa \to \lambda$ für $\lambda \in \kappa$;

in V[G] kann es aber solch eine Bijektion geben!

Wenn dies der Fall ist, so ist $V[G] \models |\kappa| = \lambda \in \kappa$ und $\kappa$ ist <u>keine</u> Kardinalzahl in V[G]. Wir sagen dann, dass $\mathbb{P}$ die Kardinalzahl $\kappa$ <u>kollabiert</u>, andernfalls, dass $\mathbb{P}$ $\kappa$ <u>erhält</u> (preserves).

Falls $\mathbb{P}$ alle Kardinalzahlen von $V$ erhält, sagen wir $\mathbb{P}$ <u>erhält Kardinalzahlen</u>.

<u>Bem.</u> Endl. Kardinalzahlen und damit auch $\omega$ bleiben <u>immer</u> erhalten.

<u>Ziel</u>: Wir möchten zeigen, dass $\mathbb{C}_\kappa$ Kard.-Zahlen erhält.
Dafür zeigen wir, dass eine FPO $\mathbb{P}$ welche ccc erfüllt keine Kardinalzahlen kollabiert; vorher zeigen wir, dass eine FPO welche Kofinalitäten erhält auch Kardinalitäten erhält.

<u>Def.</u> Eine FPO $\mathbb{P}$ <u>erhält Kofinalitäten</u>, falls für alle $\mathbb{P}$-gen. Filter $G$ über $V$ und jede Limesordinalzahl $\lambda$ in $V$ gilt:
$$cf(\lambda)^V = cf(\lambda)^{V[G]}$$

<u>Lemma 8.4</u> (15.16) Wenn eine FPO $\mathbb{P}$ Kofinalitäten erhält, so erhält sie auch Kardinalitäten.

<u>Beweis:</u> Sei $\mathbb{P}$ eine FPO welche Kofinalitäten erhält und sei $G$ ein $\mathbb{P}$-gen. Filter über $V$. Weiter sei $\kappa \in V$ eine Kardinalzahl.

- <u>$\kappa$ regulär</u>: $\kappa = |\kappa|^V = cf(\kappa)^V$
  - Weil $\mathbb{P}$ Kof. erhält, gilt $cf(\kappa)^V = cf(\kappa)^{V[G]}$.
  - Weiter gilt $cf(\kappa)^{V[G]} \leq |\kappa|^{V[G]} \leq |\kappa|^V$, woraus folgt
  $$\kappa = \underline{\underline{|\kappa|^V}} = cf(\kappa)^V = cf(\kappa)^{V[G]} \leq \underline{\underline{|\kappa|^{V[G]}}} \leq |\kappa|^V$$
  und somit ist $\kappa$ eine reguläre Kardinalzahl in $V[G]$.

- <u>$\kappa$ ist Nachfolgerkardinalzahl</u>: Weil Nachfolgerkardinalzahlen regulär sind, ist $\kappa \in V$ regulär, also ist $\kappa$ eine reg. Kard.-Zahl in $V[G]$.

$\kappa > \omega$ Limeskardinalzahl: Die Menge $\{\mu < \kappa : \mu$ Kard.-Zahl in $V\}$ ist kofinal in $\kappa$, und somit auch $\{\mu^+ < \kappa : \mu$ Kard. in $V\}$. Sei nun $\mathcal{C} = \{\eta < \kappa : \eta$ reguläre Kard.-Zahl in $V\}$. Dann ist $\mathcal{C}$ kofinal in $\kappa$, d.h. $\bigcup \mathcal{C} = \kappa$, und weil reguläre Kardinalzahlen unter $\mathbb{P}$ erhalten bleiben, ist $\mathcal{C}^V = \mathcal{C}^{V[G]}$, d.h. $\kappa = \bigcup \mathcal{C}^{V[G]}$ und $\kappa$ ist eine Kardinalzahl in $V[G]$. ⊣

**Lemma 8.5** (15.17) Ist $\mathbb{P} = (P, \leq)$ eine FPO welche ccc erfüllt, dann erhält $\mathbb{P}$ Kofinalitäten und Kardinalzahlen.

**Beweis:** Sei $\mathbb{P}$ eine FPO mit ccc und sei $G$ $\mathbb{P}$-gen. über $V$. Es genügt zu zeigen, dass $\mathbb{P}$ Kofinalitäten erhält.

- Sei $\kappa$ eine unendl. Kardinalzahl in $V$ und sei $\underset{\sim}{S}$ ein $\mathbb{P}$-Name für eine streng monoton wachsende Sequenz der Länge $\lambda = cf(\kappa)^{V[G]}$ welche kofinal in $\kappa$ ist. D.h.

$$\underset{\sim}{S}[G] : \lambda \to \kappa \text{ mit } \bigcup\{\underset{\sim}{S}[G](\alpha) : \alpha \in \lambda\} = \kappa.$$

- Mit dem Forcing-Thm. ex. somit eine $\mathbb{P}$-Bedingung $p \in G$, sodass:

$$p \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{S} \in {}^{\lambda}\underset{\sim}{\kappa} \wedge \bigcup\{\underset{\sim}{S}(\underset{.}{\alpha}) : \underset{.}{\alpha} \in \underset{.}{\lambda}\} = \underset{.}{\kappa}$$

- Wir versetzen uns nun ins Grundmodell $V$: Für jedes $\alpha \in \lambda$ definieren wir

$$D_\alpha = \{q \geq p : \exists \gamma \in \kappa \, (q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{S}(\underset{.}{\alpha}) = \underset{.}{\gamma})\}.$$

- Dann ist, mit Faktum 7.7.(b), $D_\alpha$ offen dicht oberhalb von $p$.

- Für jedes $\alpha \in \lambda$ definieren wir nun

$$Y_\alpha = \{\gamma \in \kappa : \exists q \in D_\alpha \, (q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{S}(\underset{.}{\alpha}) = \underset{.}{\gamma})\}.$$

Nach Definition ist für jedes $\alpha \in \lambda$, $Y_\alpha \subseteq \kappa$ eine Menge in $V$.

Weiter ist, weil $\mathbb{P}$ ccc erfüllt, $|Y_\alpha| \leq \omega$: Denn gilt

$$q_1 \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{S}(\check{\alpha}) = \check{\gamma}_1 \quad \text{und} \quad q_2 \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{S}(\check{\alpha}) = \check{\gamma}_2 \quad \text{mit}$$

$\gamma_1 \neq \gamma_2$, so ist $q_1 \perp q_2$.

- Gehen wir nun zurück ins Modell $V[G]$: Für jedes $\alpha \in \lambda$ sei $A_\alpha$ eine max. Antikette in $D_\alpha$. Mit Faktum 7.4.(b) und Faktum 7.5, schneidet $G$ jedes $A_\alpha$ (für $\alpha \in \lambda$), was bedeutet, dass für jedes $\alpha \in \lambda$ gilt:

$$\underset{\sim}{S}[G](\alpha) \in Y_\alpha$$

- Sei $Y := \bigcup\{Y_\alpha : \alpha \in \lambda\}$. Dann ist $Y \subseteq \kappa$ eine Menge in $V$ mit $\bigcup Y = \kappa$. Weil nun $\lambda$ unendlich ist und $|Y_\alpha| \leq \omega$ gilt für alle $\alpha \in \lambda$, erhalten wir

$$|Y| \leq \lambda \cdot \omega = \lambda \;, \quad \text{d.h.} \quad cf(\kappa)^V \leq \lambda \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Def. von } \lambda}}{=} cf(\kappa)^{V[G]}$$

- Mit $cf(\kappa)^{V[G]} \leq cf(\kappa)^V$ erhalten wir $cf(\kappa)^V = cf(\kappa)^{V[G]}$, und somit erhält $\mathbb{P}$ Kofinalitäten und mit Lem. 8.4 auch Kardinalitäten.

$\dashv$

Nun können wir folgendes Theorem beweisen:

<u>Theorem 8.6</u> (15.18) Ist $V \models ZFC$ und $G$ ist $\mathbb{C}_\kappa$-gen. über $V$, dann gilt $V[G] \models \mathfrak{c} \geq \kappa$.

<u>Beweis:</u>
- $\mathbb{C}_\kappa$ addiert $\kappa^V$ neue Cohen-reals zum Grundmodell $V$.
- $\mathbb{C}_\kappa$ erfüllt ccc $\Rightarrow \kappa^V = \kappa^{V[G]}$.
- Somit gilt: $V[G] \models \mathfrak{c} \geq \kappa$.

$\dashv$

<u>Bem.</u> $\mathrm{Con}(ZFC) \Rightarrow \mathrm{Con}(ZFC + \mathfrak{c} \geq \omega_{\omega_{\omega_{\omega_{\dots}}}})$

<u>Theorem 8.7</u> (15.19) Sei $V \models ZFC$ und $\kappa$ Kard.-Zahl in $V$ mit $\kappa^\omega = \kappa$. Ist $G$ $\mathbb{C}_\kappa$-gen. über $V$, dann gilt $V[G] \models \mathfrak{c} = \kappa$.

<u>Beweis:</u> Sei $V \models ZFC$ und $\kappa$ Kard.-Zahl mit $\kappa^\omega = \kappa$.
$[\mathfrak{c} = 2^\omega,\ \mathfrak{c}^\omega = \mathfrak{c}]$

Für $Fn(\kappa\times\omega, 2)$ schreiben wir $\mathbb{C}_\kappa$.

- Wir wissen bereits $V[G] \models \mathfrak{c} \geq \kappa$; es genügt zu zeigen $V[G] \models \mathfrak{c} \leq \kappa$.
- Wir betrachten zuerst $\mathbb{C}_\kappa$-Namen für Teilmengen von $\omega$:
  - Sei $\underset{\sim}{x}$ ein beliebiger $\mathbb{C}_\kappa$-Name für eine Teilmenge von $\omega$. Für jedes $n \in \omega$ sei
  $$\Delta_{\underset{.}{n} \in \underset{\sim}{x}} = \{p \in \mathbb{C}_\kappa : (p \Vdash_{\mathbb{C}_\kappa} \underset{.}{n} \in \underset{\sim}{x}) \vee (p \Vdash_{\mathbb{C}_\kappa} \underset{.}{n} \notin \underset{\sim}{x})\}.$$
  - Mit Faktum 7.7.(b) ist für jedes $n \in \omega$ die Menge $\Delta_{\underset{.}{n} \in \underset{\sim}{x}}$ offen dicht in $\mathbb{C}_\kappa$.
  - Für jedes $n \in \omega$ wählen wir eine max. Antikette $A_n$ in $\Delta_{\underset{.}{n} \in \underset{\sim}{x}}$ und definieren:
  $$\underset{.}{x} = \{\langle \underset{.}{n}, p\rangle : p \in A_n \wedge p \Vdash_{\mathbb{C}_\kappa} \underset{.}{n} \in \underset{\sim}{x}\}$$
  Diese Namen $\underset{.}{x}$ für Teilmengen von $\omega$ nennen wir <u>nice names</u>.
- Nun zeigen wir $0 \Vdash_{\mathbb{C}_\kappa} \underset{.}{x} = \underset{\sim}{x}$ dadurch, dass wir zeigen, dass für jedes $n \in \omega$, die Menge
$$D_n = \{q \in \mathbb{C}_\kappa : q \Vdash_{\mathbb{C}_\kappa} \underset{.}{n} \in \underset{.}{x} \leftrightarrow \underset{.}{n} \in \underset{\sim}{x}\}$$
dicht in $\mathbb{C}_\kappa$ ist.

- Sei $p \in \mathbb{C}_\kappa$ und sei $n \in \omega$ fix. Weil $\Delta_{\check{n} \in \underset{\sim}{x}}$ dicht in $\mathbb{C}_\kappa$ ist, ex. $p \leq p_0 \in \Delta_{\check{n} \in \underset{\sim}{x}}$ und weil $A_n$ eine max. Antikette in $\Delta_{\check{n} \in \underset{\sim}{x}}$ ist, ex. ein $p_1 \in A_n$ mit $p_0, p_1$ kompatibel. D.h. es ex. $q$ mit $p_0 \leq q \geq p_1$.

- Weil $p_1 \in \Delta_{\check{n}, \underset{\sim}{x}}$ entscheidet $p_1$ die Aussage "$\check{n} \in \underset{\sim}{x}$", d.h. entweder $\underbrace{p_1 \Vdash_{\mathbb{C}_\kappa} \check{n} \in \underset{\sim}{x}}_{\Rightarrow \langle \check{n}, p_1 \rangle \in \dot{x} \text{ d.h. } p_1 \Vdash_{\mathbb{C}_\kappa} \check{n} \in \dot{x}}$ oder $\underbrace{p_1 \Vdash_{\mathbb{C}_\kappa} \check{n} \notin \underset{\sim}{x}}_{\Rightarrow \langle \check{n}, p_1 \rangle \notin \dot{x} \text{ d.h. } p_1 \Vdash_{\mathbb{C}_\kappa} \check{n} \notin \dot{x}}$,

  und weil $q \geq p_1$ gilt

$$q \Vdash_{\mathbb{C}_\kappa} \check{n} \in \dot{x} \leftrightarrow \check{n} \in \underset{\sim}{x}.$$

- Damit ist $D_n$ dicht in $\mathbb{C}_\kappa$ und für jeden Namen $\underset{\sim}{x}$ für eine Teilmenge von $\omega$ ex. ein nice name $\dot{x}$ mit $0 \Vdash_{\mathbb{C}_\kappa} \dot{x} = \underset{\sim}{x}$.

- Nun bestimmen wir die Kardinalität der Menge der nice names:
  - $|\mathbb{C}_\kappa| = |[\kappa \times \omega \times 2]^{<\omega}| = |\kappa^{<\omega}| = \kappa$
  - Weil $\mathbb{C}_\kappa$ ccc erfüllt ist jede Antikette abz., und somit ex. höchstens
$$((\omega \cdot \kappa)^\omega)^\omega = \kappa^{\omega \cdot \omega} = \kappa^\omega = \kappa$$
    nice names.

- Somit muss gelten $V[G] \models \mathfrak{c} \leq \kappa$, und mit dem vorherigen Theorem erhalten wir

$$V[G] \models \mathfrak{c} = \kappa.$$

$\dashv$

<u>Bsp.</u> $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \Rightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \mathfrak{c} = \omega_{\omega_{\omega_{\omega_{\cdot_{\cdot_{\cdot}}}}}+1})$

Faktum 8.8 (15.20)

(a) Ist $\kappa$ eine Kardinalzahl mit $cf(\kappa) > \omega$ und für jede Kardinalzahl $\lambda < \kappa$ gilt $\lambda^\omega \leq \kappa$, so gilt $\kappa^\omega = \kappa$.

(b) Gilt $\omega_{\alpha+1} = 2^{\omega_\alpha}$ für eine Ordinalzahl $\alpha$, so ist $\omega_{\alpha+1}^\omega = \omega_{\alpha+1}$.

Beweis: (a) ${}^\omega\kappa = \bigcup_{\substack{\alpha \in \kappa \\ \text{mit } |\alpha| = \lambda_\alpha < \kappa}} {}^\omega\alpha$ (weil $cf(\kappa) > \omega$) $\Rightarrow \underbrace{|{}^\omega\kappa|}_{=\kappa^\omega} \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa$.

(b) $\underbrace{(2^{\omega_\alpha})^\omega}_{\omega_{\alpha+1}^\omega} = 2^{\omega_\alpha \cdot \omega} = \underbrace{2^{\omega_\alpha}}_{\omega_{\alpha+1}}$. ⊣

[Definition von "$\kappa$-closed": $\gamma < \kappa$, $\{p_\xi : \xi \in \gamma\}$ aufsteigend $\Rightarrow$ obere Schranke]
$\sigma$-closed $\hat{=}$ $\omega_1$-closed

Faktum 8.9 (15.21) [Aufgabe 12]

[$\mathbb{P}$ $\kappa$-closed, $\mu < \kappa$, $f : \mu \to X \Rightarrow f \in V$; $\mathbb{P}$ erhält Kard. $\lambda \leq \kappa$]

[Definition von "$\mathbb{K}_\alpha = (K_\alpha, \subseteq)$": $p : \omega_{\alpha+1} \to \mathcal{P}(\omega_\alpha)$, $|\mathrm{dom}(p)| \leq \omega_\alpha$]

Bem. $\mathbb{K}_\alpha$ ist $\omega_{\alpha+1}$-closed und erhält somit alle Kard.-Zahlen $\leq \omega_{\alpha+1}$.

Theorem 8.10 (15.22)

Ist $V \models ZFC$ und ist $G_\alpha$ $\mathbb{K}_\alpha$-gen über $V$, dann gilt:

$$V[G_\alpha] \models 2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1}.$$

Für $\alpha = 0$ erhalten wir somit $V[G_0] \models CH$.

Beweis: Für $\xi \in \omega_{\alpha+1}$ und $x \subseteq \omega_\alpha$ sei

$$D_{\xi,x} = \{p \in \mathbb{K}_\alpha : \xi \in \mathrm{dom}(p) \wedge x \in \mathrm{ran}(p)\}.$$

$$\rightsquigarrow \bigcup G : \omega_{\alpha+1} \underset{\text{surj.}}{\twoheadrightarrow} \mathcal{P}(\omega_\alpha) \quad \Rightarrow \quad V[G_\alpha] \models 2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1}.$$

**Theorem 8.11** (15.23) Für jede Ordinalzahl $\alpha \in \Omega$ haben wir:

$$\mathrm{Con}(ZFC) \implies \mathrm{Con}(ZFC + \mathfrak{c} = \omega_{\alpha+1})$$

**Beweis:** • Sei $G_\alpha$ $\mathbb{K}_\alpha$-gen. über $V$, dann gilt:

$$V[G_\alpha] \models 2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1}.$$

• Mit Faktum 8.8.(b) erhalten wir $\omega_{\alpha+1}^{\omega} = \omega_{\alpha+1}$.

• Für $\kappa = \omega_{\alpha+1}$ gilt also $\kappa^\omega = \kappa$. Ist $G_\mathfrak{c}$ $\mathbb{C}_\kappa$-gen. über $V[G_\alpha]$, so erhalten wir mit Thm. 8.7:

$$V[G_\alpha][G_\mathfrak{c}] \models \mathfrak{c} = \kappa,$$

d.h. $$V[G_\alpha][G_\mathfrak{c}] \models \mathfrak{c} = \omega_{\alpha+1}.$$

$\dashv$

[Bem. zur 2-Schritt-Iteration $V[G_\alpha][G_\mathfrak{c}]$.]