10 EIGENSCHAFTEN VON FORCING-ERWEITERUNGEN

10.1 Dominating, splitting, bounded und unbounded reelle Zahlen

Erinnerung: $f, g \in {}^\omega\omega$; $g <^* f$; g ist dominiert durch f

$x, y \in [\omega]^\omega$; x splits y falls $|x \cap y| = \omega = |y \setminus x|$.

$V \models ZFC$, G sei $\mathbb{P}$-gen. über V für eine FPO $\mathbb{P}$.

Sei $f \in {}^\omega\omega$ in $V[G]$: · f ist eine dominating real (über V) falls für jede Fkt. $g \in {}^\omega\omega$ in V gilt: $g <^* f$.

· f ist eine unbounded real (über V) falls f nicht dominiert wird durch eine Fkt. $g \in {}^\omega\omega \cap V$.

Sei $x \in [\omega]^\omega$ in $V[G]$: · x ist eine splitting real (über V) falls x splits y für alle $y \in [\omega]^\omega \cap V$.

Faktum 10.1 (21.1) Enthält $V[G]$ eine dominating real, dann enthält $V[G]$ auch eine splitting real.

Beweis: · Für $f \in {}^\omega\omega$ in $V[G]$ definieren wir

$$\sigma_f = \bigcup\{[f^{2n}(0), f^{2n+1}(0)) : n \in \omega\}.$$

· Für $x \in [\omega]^\omega$ sei g_x ...

· $g_x <^* f \Rightarrow \exists n_0 \in \omega\, \forall k \geq n_0\, (g_x(k) < f(k))$

· Mit $k \leq f^k(0)$ und $k \leq g_x(k)$ erhalten wir daraus (für $k \geq n_0$):

$$f^k(0) \leq g_x(f^k(0)) < f^{k+1}(0) \quad \ldots$$

$\dashv$

Def. · Eine FPO $\mathbb{P}$ addiert dominating, unbounded, splitting reals, falls $V[G]$ dominating, ...

· Eine FPO $\mathbb{P}$ ist ${}^\omega\omega$-bounding falls es in $V[G]$ keine unbounded reals gibt, d.h. ...

10.2 Cohen Forcing

$\mathbb{C} = (Fn(\omega, 2), \leq)$, $\overline{\mathbb{C}} := (\bigcup_{n\in\omega} {}^n 2, \leq)$

$\mathbb{C}(\omega) := (Fn(\omega,\omega), \leq)$, $\overline{\mathbb{C}}(\omega) := (\bigcup_{n\in\omega} {}^n\omega, \leq)$

Proposition 10.2 (18.2) $\mathbb{C} \approx \overline{\mathbb{C}} \approx \mathbb{C}(\omega) \approx \overline{\mathbb{C}}(\omega)$

Beweis: Mit dichten Einbettungen.

- $\mathbb{C} \approx \overline{\mathbb{C}}$: $i_2 : \bigcup_{n\in\omega} {}^n 2 \to Fn(\omega, 2)$ Inklusion ist dichte Einbettung.
- $\mathbb{C}(\omega) \approx \overline{\mathbb{C}}(\omega)$: i_ω : . . .
- $\overline{\mathbb{C}}(\omega) \approx \overline{\mathbb{C}}$: $h : \bigcup_{n\in\omega} {}^n\omega \to \bigcup_{n\in\omega} {}^n 2$ definiert wie folgt:

Sei $p : n_0 \to \omega$. $n_0 = 0 \Rightarrow h(p) := \emptyset$

$n_0 > 0$:

$$b_k = \begin{cases} p(0) & \text{für } k = 0 \\ b_{k-1} + p(k) + 1 & \text{für } k > 0. \end{cases}$$

Sei $x_p := \{b_k : k \in n_0\}$ und sei $h(p) : b_{n_0-1} + 1 \to 2$ wobei

$$h(p)(j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } j \in x_p, \\ 0 & \text{falls } j \notin x_p. \end{cases}$$

p : $p(0)$ $p(1)$ . . . $p(n_0-1)$

$h(p)$: $p(0)$ 0-en, $\underset{b_0\text{-te Stelle}}{\underline{1}}$, $p(1)$ 0-en, $\underset{b_1\text{-te Stelle}}{\underline{1}}$, . . . , $p(n_0-1)$ 0en, $\underset{b_{n_0-1}\text{-te Stelle}}{\underline{1}}$

h ist dichte Einbettung. ⊣

Lemma 10.3 (22.1) Cohen Forcing addiert unbounded reals.

Beweis: Sei $\mathbb{C} = (\bigcup_{i\in\omega} {}^i\omega, \leq)$, und sei $c \in {}^\omega\omega$ $\mathbb{C}$-gen. über V.

Weiter sei $g \in {}^\omega\omega \in V$.

- $p \Vdash_{\mathbb{C}} \dot{c}|_{dom(p)} = \check{p}$.
- Für jedes $n \in \omega$ und jede $\mathbb{C}$-Bedingung p ex. $k \geq n$ und $q \geq p$ mit $q(k) > g(k)$.

. . . ⊣

<u>Lemma 10.4</u> (22.2) Cohen Forcing addiert keine dominating reals.

<u>Beweis:</u> Sei $\mathbb{C} = (Fn(\omega,2), \leq)$, sei $c \in {}^{\omega}2$ Cohen generisch über V, und sei $f \in {}^{\omega}\omega$ in $V[c]$ eine Funktion mit $\mathbb{C}$-Name $\underset{\sim}{f}$. Um zu zeigen, dass f nicht dominating ist über V müssen wir eine Fkt. $g \in {}^{\omega}\omega \cap V$ finden, sodass für alle $n \in \omega$ ein $k \geq \omega$ existiert mit $g(k) \geq f(k)$.

- Sei $\{p_k : k \in \omega\}$ eine Abzählung von $Fn(\omega, 2)$. Für jedes $k \in \omega$ definieren wir
$$g(k) = \min\{n \in \omega : \exists q \geq p_k \, (q \Vdash_{\mathbb{C}} \underset{\sim}{f}(k) = n)\}.$$

- Für jede $\mathbb{C}$-Bed. p und jedes $n \in \omega$ ex. $k \geq n$ sodass $p_k \geq p$, und wir finden ein $q \geq p_k$ mit $q \Vdash_{\mathbb{C}} \underset{\sim}{f}(k) = g(k)$.

- Somit ist für jedes $n \in \omega$ die Menge der $\mathbb{C}$-Bed. q mit
$$q \Vdash_{\mathbb{C}} \exists k \geq n \, (\underset{\sim}{f}(k) = g(k))$$
offen dicht in $Fn(\omega, 2)$.

- D.h. $g \in {}^{\omega}\omega \cap V$ ist nicht dominiert durch $f \in V[c]$. $\dashv$

<u>Lemma 10.5</u> (22.3) Cohen Forcing addiert splitting reals.

<u>Beweis:</u> $\mathbb{C} = (\bigcup_{i \in \omega} {}^{i}2, \leq)$ und sei $c \in {}^{\omega}2$ $\mathbb{C}$-gen. über V.
Wir zeigen, dass c eine splitting real generiert.

- Sei $\sigma_c := \{k \in \omega : c(k) = 1\}$ und sei $\underset{\sim}{\sigma_c}$ ein $\mathbb{C}$-Name für σ_c.

- Sei $x \in [\omega]^{\omega} \cap V$. Für jedes $n \in \omega$ ist dann die Menge der $\mathbb{C}$-Bed. p mit
$$p \Vdash_{\mathbb{C}} |x \cap \underset{\sim}{\sigma_c}| > n \wedge |x \setminus \underset{\sim}{\sigma_c}| > n$$
offen dicht, d.h. σ_c splits x (für jedes $x \in V$). $\dashv$

10.3 Mathias Forcing

Mathias Forcing $\mathbb{M} = (M, \leq)$ ist wie folgt definiert:

$$M = \{(s,x) : s \in \mathrm{fin}(\omega) \wedge x \in [\omega]^\omega \wedge \max(s) < \min(x)\}$$

$$(s,x) \leq (t,y) :\Longleftrightarrow s \subseteq t \wedge y \subseteq x \wedge t \setminus s \subseteq x$$

Mathias Forcing restringiert auf eine Familie $\mathcal{E} \subseteq [\omega]^\omega$ wird mit $M_{\mathcal{E}}$ bezeichnet, wobei für $(s,x) \in M_{\mathcal{E}}$ gilt: $x \in \mathcal{E}$.
[interessanter Fall: $\mathcal{E}$ ein Ramsey Ultrafilter]

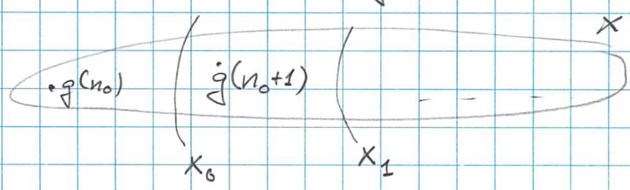
<u>Lemma 10.6</u> (a) Ist $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$ ein Ultrafilter, so erfüllt $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}$ ccc.
(b) $\mathbb{M}$ erfüllt ccc nicht. [mad family der Kard. $\mathfrak{c}$]

<u>Lemma 10.7</u> (a) $\mathbb{M}$ addiert eine dominating real.
(b) $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}$ für $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$ ein Ultrafilter addiert eine unbounded real.
(c) Ist $\mathcal{U}$ Ramsey, so addiert $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}$ eine dominating real.

<u>Beweis</u>: (a) klar, (b) Axiom. ML, Serie 9, 26.(a)

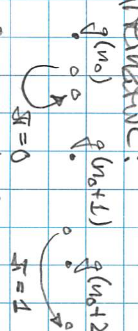
(c) Sei m eine <u>Mathias real</u>, d.h. $m = \bigcup\{s \in \mathrm{fin}(\omega) : \exists x\,((s,x) \in G)\}$ für einen $\mathbb{M}$-gen. Filter $G \subseteq \mathbb{M}_{\mathcal{U}}$.

- Wir zeigen, dass es für jede $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}$-Bed. p und jede Fkt. $g \in {}^\omega\omega \cap V$ eine Bed. $q \geq p$ gibt mit $q \Vdash_{\mathbb{M}_{\mathcal{U}}}$ "$\dot{m}$ dominiert g".
- Sei $p = (s,x)$ mit $n_0 = |s|$, und sei $x_0 := x \setminus g(n_0)^+$.
  Allgemein sei $x_{n+1} := x_n \setminus g(n_0+n+1)^+$.



- Weil $\mathcal{U}$ ein Ramsey Ultrafilter ist, ex. $y \in \mathcal{U}$ mit $|y \cap (x_{n+1} \setminus x_n)| \leq 1$.
- Damit gilt $\underbrace{(s,y)}_{\geq p} \Vdash_{\mathbb{M}_{\mathcal{U}}}$ "$\dot{m}$ dominiert g". ⊣

Alternative:



$y \in \mathcal{U}$ hom. bzgl. $\pi \Rightarrow m$ dominiert g.

Intermezzo: Charakterisierung von Ramsey Ultrafiltern mit Spielen

Sei $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$ ein Ultrafilter. Bezüglich $\mathcal{U}$ definieren wir das folgende unendliche 2-Spieler Spiel $\mathcal{G}_\mathcal{U}$:

$$\mathcal{G}_\mathcal{U}: \quad \begin{array}{lccccccc} \mathrm{I} & x_0 \in \mathcal{U} & & \supseteq & & x_1 \in \mathcal{U} & & \supseteq \quad \dots \\ \mathrm{II} & & t_0 \subseteq x_0 & & & & t_1 \subseteq x_0 & \end{array}$$

wobei $t_n = \{a_n\}$ für ein $a_n \in x_n$ oder $t_n = \emptyset$.

<u>II gewinnt das Spiel</u> gdw. $\bigcup_{n\in\omega} t_n \in \mathcal{U}$ (für $n \in \omega$), sonst gewinnt I.

- Eine Strategie σ für I ist eine Funktion welche in Abh. der gespielten Züge $x_0, t_0, \dots, t_n$ den Zug x_n von I bestimmt.
- Spielt I mit der Strategie σ, so sieht der Spielverlauf wie folgt aus:
  $$x_0 = \sigma(\emptyset), \quad x_1 = \sigma(x_0, t_0), \quad x_2 = \sigma(x_0, t_0, x_1, t_1), \dots$$
- Eine Strategie σ für I ist eine <u>Gewinnstrategie</u> für I, falls I das Spiel mit der Strategie σ immer gewinnt, unabh. davon, was II spielt.

[Analoge Def. von Strategie τ für II.]

Welcher Spieler hat eine Gewinnstrategie?

<u>Theorem 10.8</u> (vgl. 11.7) $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$ ist ein Ramsey Ultrafilter genau dann wenn I keine Gewinnstrategie im Spiel $\mathcal{G}_\mathcal{U}$ hat.

[Was bedeutet das?]

__Beweis:__ Wir zeigen, dass I genau dann eine Gewinnstrategie hat, wenn $\mathcal{U}$ kein Ramsey Ultrafilter ist.

($\Leftarrow$) Mit Prp. 5.7.(c) ist $\mathcal{U}$ ein RUF gdw. es für jede absteigende Folge $x_0 \supseteq x_1 \supseteq \ldots$ von Elementen aus $\mathcal{U}$ eine monoton wachsende Fkt. $f \in {}^\omega\omega$ gibt, sodass $f[\omega] \in \mathcal{U}$, $f(0) \in x_0$ und $f(k+1) \in x_{f(k)}$ (für alle $k \in \omega$).

- Ist $\mathcal{U}$ kein RUF, so ex. $x_0 \supseteq x_1 \supseteq \ldots$ sodass keine Fkt. $f \in {}^\omega\omega$ die obigen Eigenschaften hat.

- Sei $\sigma(\emptyset) := x_0$ und für $n \in \omega$ sei $\sigma(x_0, t_0, \ldots, x_n, t_n) := x_{a_n} \setminus a_n^+$ für $t_n = \{a_n\}$ und x_n für $t_n = \emptyset$.

- Weiter definieren wir $f \in {}^\omega\omega$ durch $f(n) = a_n$ für $t_n = \{a_n\}$ und $f(n) = a_{n-1}$ für $t_n = \emptyset$ (wobei wir annehmen $t_0 \neq \emptyset$).

- Dann ist $f(0) \in x_0$ und $f(n+1) \in x_{a_n} = x_{f(n)}$. Weil $\mathcal{U}$ kein RUF ist, muss also gelten $f[\omega] \notin \mathcal{U}$, d.h. $\{a_n : n \in \omega\} \notin \mathcal{U}$ und I gewinnt das Spiel mit Strategie σ. Also ist σ eine Gewinnstrategie für I.

($\Rightarrow$) Sei nun σ eine Strategie für I. Wir müssen zeigen, dass II gewinnen kann, woraus folgt, dass σ keine Gewinnstrategie ist.

- Für $n \in \omega$ sei $X_n = \{x_0, \ldots\}$ die Menge aller ersten $n+1$ Spielzüge von I unter den Annahmen, dass
  - I folgt der Strategie σ,
  - II spielt in den ersten n Zügen nur Mengen $t_k \subseteq n$, d.h. $t_k \subseteq n$ für alle $0 \leq k < n$.

- Da es nur endlich viele $t_k \subseteq n$ gibt, ist für jedes $n \in \omega$ die Menge X_n endlich, und weil $\mathcal{U}$ ein Filter ist, ist somit $y_n := \bigcap X_n \in \mathcal{U}$.

- Weil $\mathcal{U}$ ein P-point ist, ex. ein $y^* \in \mathcal{U}$ mit $y^* \subseteq^* y_n$ für alle $n \in \omega$, d.h. es ex. eine Fkt. $f \in {}^\omega\omega$ mit $y^* \setminus f(n) \subseteq y_n$. streng monoton wachsende

- Sei $k_0 := f(0)$ und allg. sei $k_{n+1} := f(k_n)$.

- Weil $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist, ist entweder

$$z_0 := \bigcup_{j \in \omega} [k_{2j}, k_{2j+1}) \quad \text{oder} \quad z_1 := \omega \setminus z_0$$

in $\mathcal{U}$. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass $z_1 \in \mathcal{U}$. Dann ist auch $z_1 \cap y^* \in \mathcal{U}$, d.h.

$$\bigcup_{j \in \omega} \left([k_{2j+1}, k_{2j+2}) \cap y^* \right) \in \mathcal{U}.$$

- Weil $\mathcal{U}$ ein Q-point ist ex. eine Menge $\{a_{k_{2j}} : j \in \omega\} \in \mathcal{U}$ mit $a_{k_{2j}} \in [k_{2j+1}, k_{2j+2})$ für alle $j \in \omega$.

- Wir betrachten nun den Spielverlauf $\langle x_0, t_0^*, x_1, t_1^*, \ldots \rangle$ wobei I mit der Strategie σ spielt und

$$t_n^* := \begin{cases} \{a_{k_{2j}}\} & \text{falls } n = k_{2j} \text{ und } a_{k_{2j}} \in y^*, \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Weil $\{a_{k_{2j}} : j \in \omega\} \in \mathcal{U}$, ist auch $\{a_{k_{2j}} : j \in \omega\} \cap y^* \in \mathcal{U}$ und somit ist $\bigcup_{n \in \omega} t_n^* \in \mathcal{U}$. D.h. II gewinnt das Spiel

... falls die Spielzüge t_n^* von II regelkonform sind,

was noch zu zeigen ist.

Zu zeigen ist, dass für $n \in \omega$ mit $n = k_{2j}$ (für ein $j \in \omega$) gilt: $a_{k_{2j}} = a_n \in x_n$.

- Für alle $j \in \omega$ ist $a_{k_{2j}-2} \in [k_{2j-1}, k_{2j}) \subseteq k_{2j}$, woraus folgt, dass $a_{k_{2j}-2} < k_{2j}$. D.h. falls $n = k_{2j}$, dann ist für alle $k < n$, $t_k^* \subseteq n$ wobei $t_k^* = \emptyset$ oder $t_k^* = \{a_k\}$.

- Ist nun $n = k_{2j}$ für ein $j \in \omega$, so ist $a_n = a_{k_{2j}} \in [k_{2j+1}, k_{2j+2})$, d.h. $t^*_{k_{2j}} \subseteq [k_{2j+1}, k_{2j+2}) \cap y^*$.

- Weiter gilt:

$$y^* \setminus k_{2j+1} = y^* \setminus f(k_{2j}) \subseteq y_{k_{2j}} = \bigcap X_{k_{2j}} \subseteq \underbrace{\bigcap \{x_0, \dots, x_{k_{2j}}\}}_{\subseteq x_{k_{2j}}}$$

wobei $x_0, \dots, x_{k_{2j}}$ die Spielzüge von I waren als Antwort auf die Spielzüge $t_0^*, \dots, t^*_{k_{2j}-2}$.

- Nach Definition ist $t^*_{k_{2j}} \subseteq y^* \setminus k_{2j+1}$ und weil $y^* \setminus k_{2j+1} \subseteq x_{k_{2j}}$ erhalten wir:

$$t^*_{k_{2j}} \subseteq x_{k_{2j}}$$

- Für jedes $n \in \omega$ erhalten wir somit entweder $t_n^* = \{a_n\} \subseteq x_n$, d.h. $a_n \in x_n$, oder $t_n^* = \emptyset$. Insbesondere gewinnt II und σ ist keine Gewinnstrategie für I.

$\dashv$

<u>Bem.</u> • Spielt II $s_n \subseteq x_n$ mit $s_n \in \mathrm{fin}(\omega)$, so ist $\mathcal{U}$ genau dann ein P-point falls I keine Gewinnstrategie im Spiel $G_{\mathcal{U}}$ hat.

[Def. von Ramsey-family und P-family.]

10.4 Laver Forcing

Laver Forcing $\mathbb{L} = (L, \leq)$ bzw. $\mathbb{L}_{\mathcal{F}} = (L_{\mathcal{F}}, \leq)$ ist wie folgt definiert:

- $\mathbb{L}$-Bedingungen sind geordnete Paare (s, T), wobei $s \in \mathrm{seq}^{<}(s)$ und $T \subseteq \mathrm{seq}^{<}(\omega)$ ist ein super-perfekter Baum mit $s \in T$, d.h. für alle $t \in T$ haben wir entweder $t < s$ oder $s \leq t \wedge t \in \mathrm{split}(T)$; wobei
$$\mathrm{split}(T) = \{ t \in T : |\underbrace{\{ n \in \omega : t^\frown n \in T \}}_{=: \mathrm{next}_T(t)}| = \omega \}.$$

"$\mathrm{seq}^{<}$" sind streng monoton wachsende endl. Sequenzen

- Für $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ ein Filter verlangen wir für $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$-Bedingungen zusätzlich $\mathrm{next}_T(t) \in \mathcal{F}$.

- $(s, T) \leq (s', T') :\Longleftrightarrow s \leq s' \wedge T' \subseteq T$

Faktum 10.9 Laver Forcing $\mathbb{L}$ und $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ (für einen Filter welcher den Fréchet-Filter enthält) addiert dominating reals.

Proposition 10.10 Ist $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$ ein Ramsey Ultrafilter, so ist
$$\mathbb{L}_{\mathcal{U}} \approx \mathbb{M}_{\mathcal{U}}.$$

Beweis: Sei $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$ ein Ramsey Ultrafilter. Wir definieren
$$h: \mathbb{M}_{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbb{L}_{\mathcal{U}}$$
$$(s, x) \longmapsto (\tilde{s}, T(x))$$
wobei $\tilde{s}$ die aufsteigende Aufzählung von s ist und für $t \in T(x)$ gilt: $t < \tilde{s}$ oder $\tilde{s} \leq t$ und
$$\mathrm{next}_{T(x)}(t) = x \setminus (\max(t) + 1).$$

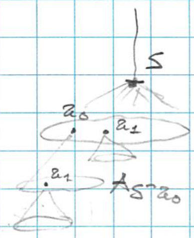
Wir zeigen, dass h eine dichte Einbettung ist:

(a) $\forall p_0, p_1 \in \mathbb{M}_{\mathcal{U}} \; (p_0 \leq p_1 \leftrightarrow h(p_0) \leq h(p_1))$ [klar]

(b) $\forall q \in \mathbb{L}_{\mathcal{U}} \, \exists p \in \mathbb{M}_{\mathcal{U}} \; (q \leq h(p))$ [zu zeigen]

Sei $q = (s, T) \in \mathbb{L}_\mathcal{U}$ eine beliebige $\mathbb{L}_\mathcal{U}$-Bedingung.

- Für jedes $t \in T$ mit $s \trianglelefteq t$ sei $A_t := \mathrm{next}_T(t)$.
- I & II spielen das Spiel $G_\mathcal{U}$, wobei I mit folgender Strategie spielt:
  - $x_0 := A_s$
  - Ist $t_n = \emptyset$, so sei $x_{n+1} := x_n$.
  - Ist $t_0 = \{a_0\}$ mit $a_0 \in x_0$, so sei $x_1 := A_{s^\frown a_0} \cap x_0$
  - Ist $t_1 = \{a_1\}$ mit $a_1 \in x_1$, so ist $a_1 \in A_s \cap A_{s^\frown a_0}$ und $x_2 := A_{s^\frown a_1} \cap A_{s^\frown a_0{}^\frown a_1} \cap x_1$
  - Ist allg. $t_n = \{a_n\}$ mit $a_n \in x_n$ und $a_n \in A_{s^\frown r}$ für jedes $r \in \underbrace{\mathrm{seq}^<(\{a_0, \ldots, a_{n-1}\})}_{S_{n-1}}$, dann sei $x_{n+1} := x_n \cap \bigcap_{r \in S_{n-1}} A_{s^\frown r^\frown a_n}$



- Weil $\mathcal{U}$ ein Ramsey-Ultrafilter ist, ist diese Strategie von I keine Gewinnstrategie und II kann a_n (für $n \in \omega$) so spielen, dass $A := \{a_n : n \in \omega\} \in \mathcal{U}$.
- Sei nun $\tilde{q} = (s, \tilde{T})$ so gewählt, dass für alle $t \in \tilde{T}$ mit $s \trianglelefteq t$ gilt: $\mathrm{next}_{\tilde{T}}(t) = A \setminus (\max(t) + 1)$.
- Dann ist $\tilde{q} \geq q$ und $h((\bar{s}, A)) = \tilde{q} \geq q$, wobei $\bar{s}$ die Menge $\{s(i) : i < |s|\}$ ist. Damit erfüllt h auch (b) und ist somit eine dichte Einbettung.
- Also gilt $\mathbb{L}_\mathcal{U} \approx \mathbb{M}_\mathcal{U}$. $\dashv$

[Bemerkung zur Umkehrung.]

<u>Def.</u> Sei $D \subseteq L_{\mathcal{U}}$, wobei $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^{\omega}$ ein Ultrafilter ist.
Weiter sei $p = (s, T) \in L_{\mathcal{U}}$ eine $\mathbb{L}_{\mathcal{U}}$-Bedingung, wobei die Elemente $t \in p$ endl. Sequenzen sind.
Wir definieren $rk^D : p \to \Omega \cup \{\infty\}$ mit Induktion wie folgt:

$$t \mapsto rk^D(t)$$

(i) $rk^D(t) = 0 \iff \exists q \in D \; (p_t \leq^{\circ} q)$

wobei p_t ... / und $\leq^{\circ}$ ...

(ii) $rk^D(t) \leq \alpha$ falls $\{n \in \omega : t^\frown n \in p \wedge rk^D(t^\frown n) < \alpha\} \in \mathcal{U}$.

(iii) $rk^D(t) = \alpha$ falls $rk^D(t) \leq \alpha$ und $rk^D(t) \nleq \beta$ für $\beta < \alpha$.

(iv) $rk^D(t) = \infty$ sonst, d.h. $rk^D(t) \neq \alpha$ für $\alpha \in \Omega$.

<u>Lemma 10.11</u> Für jedes $t \in p = (s, T)$ mit $s \preccurlyeq t$ ist $rk^D(t) \in \Omega$.

<u>Beweis:</u> Wir nehmen an, dass $rk^D(t) = \infty$ für ein $t \in p$ mit $s \preccurlyeq t$.

- Wir definieren nun
$$q_t := \{\tilde{t} \in p_t : \tilde{t} \preccurlyeq t \text{ oder } t \preccurlyeq \tilde{t} \wedge \forall r\, (t \preccurlyeq r \preccurlyeq \tilde{t} \to rk^D(r) = \infty)\}.$$
- Wir haben $q_t \subseteq p_t$ und nach Def. von rk^D erhalten wir für alle $t \preccurlyeq \tilde{t} \in q_t$, $\{n \in \omega : \tilde{t}^\frown n \in q_t\} \in \mathcal{U}$.
- Somit ist $q_t \in L_{\mathcal{U}}$ und weil D dicht ist, existiert $\tilde{q} \in D$ mit $\tilde{q} \geq q_t$. Ist $\tilde{q} = (\tilde{s}, \tilde{T})$, so ist $\tilde{s} \in q_t$, d.h. $rk^D(\tilde{s}) = \infty$, und weil $(\tilde{s}, \tilde{T}) \in D$ ist $rk^D(\tilde{s}) = 0$. $\lightning$ zu $rk^D(\tilde{s}) = \infty$

$\dashv$

<u>Proposition 10.12</u> Ist φ ein Satz der Forcing-Sprache und $p \in L_{\mathcal{U}}$ eine $\mathbb{L}_{\mathcal{U}}$-Bedingung, so ex. eine $\mathbb{L}_{\mathcal{U}}$-Bedingung $q \overset{\circ}{\geq} p$, sodass entweder $q \Vdash_{\mathbb{L}_{\mathcal{U}}} \varphi$ oder $q \Vdash_{\mathbb{L}_{\mathcal{U}}} \neg\varphi$.

<u>Beweis:</u> Δ_φ ist offen dicht; mit Lem. 10.11 und Induktion über Ω.
$rk^{\Delta\varphi}(s) = 0$ ✓, $rk^{\Delta\varphi}(s) = \alpha \Rightarrow \{n \in \omega \ldots rk(p_{s^\frown n}) < \alpha\} \in \mathcal{U}$, $\tilde{p}_{s^\frown n}$ entsch. φ ...

[Bem. zu "pure decision" und zu $\mathbb{L}$ anstelle von $\mathbb{L}_{\mathcal{U}}$.] $\dashv$