[Die Idee des Forcierens (Ch. 13), Gödel'scher Vollständigkeitssatz...]

[6 DAS MARTIN-AXIOM (aus Ch. 14)]

Def. Sei $\mathbb{P} = (P, \leq)$ eine p.o. Menge. Dann heisst $\mathbb{P}$ abzählbar falls P abzählbar ist.

Proposition 6.9 (14.10) MA(abzählbar) (d.h. MA für abz. p.o.) impliziert die Existenz von 2^{c} paarweise nicht isomorphen Ramsey-Ultrafiltern.

Beweis: Da es nur c Permutationen von ω gibt, genügt es zu zeigen, dass es 2^{c} verschiedene Ramsey UF gibt. Wir konstruieren die 2^{c} versch. Ramsey UF mit transfiniter Induktion mit Hilfe eines binären Baumes der Höhe c bei dem jeder der 2^{c} Äste eine Ramsey UF generiert:

- Für jede Fkt. $\gamma: c \to 2$ und jedes $\alpha \in c$ konstruieren wir eine Menge
$$\mathcal{F}_{\gamma|\alpha} = \{ x_{\beta,\gamma(\beta)} : \beta \in \alpha \} \subseteq [\omega]^{\omega}$$
mit sfip sodass der Filter, der durch $\bigcup_{\alpha \in c} \mathcal{F}_{\gamma|\alpha}$ generiert wird ein Ramsey UF ist. Zusätzlich stellen wir sicher, dass für verschiedene $\gamma, \gamma' \in {}^{c}2$ auch die durch $\bigcup_{\alpha\in c} \mathcal{F}_{\gamma|\alpha}$ und $\bigcup_{\alpha \in c} \mathcal{F}_{\gamma'|\alpha}$ Ramsey UF versch. sind.
- Um Ramsey UF zu erhalten genügt es mit Prp. 5.7 (b) sicher zu stellen, dass es für jede unendl. Partition $\{Y_n : n \in \omega\}$ von ω entweder ein $Y_{n_0} \in \bigcup_{\alpha\in c} \mathcal{F}_{\gamma|\alpha}$ ex. (für ein $n_0 \in \omega$), oder ein $x \in \bigcup_{\alpha \in c} \mathcal{F}_{\gamma|\alpha}$ ex. mit $|x \cap Y_n| \leq 1$ für alle $n \in \omega$.

- Sei $\{\mathcal{P}_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$ die Menge aller unendl. Partitionen von ω. Insbesondere ist $\mathcal{P}_\alpha = \{Y_n^\alpha : n \in \omega\}$ eine Menge von paarweise disjunkten Teilmengen von ω mit $\bigcup \mathcal{P}_\alpha = \omega$ (und $Y_n^\alpha \neq \emptyset$).

- Weiter sei $x_{0,0} := \{2n : n \in \omega\}$ und $x_{0,1} := \{2n+1 : n \in \omega\}$, und für $\delta \in \{0,1\}$ sei

$$\mathcal{F}_{\{\langle 0,\delta\rangle\}} := \{x_{0,\delta}\} \cup \underbrace{\{x \subseteq \omega : |\omega \setminus x| < \omega\}}_{\text{Fréchet-Filter}}$$

- Bem. Beide Familien $\mathcal{F}_{\{\langle 0,0\rangle\}}$ und $\mathcal{F}_{\{\langle 0,1\rangle\}}$ haben die sfip.

- Sei nun $\alpha \in \mathfrak{c}$ und nehmen wir an, dass wir für jedes $\eta \in {}^\alpha 2$ und jedes $\beta \in \alpha$ bereits Familien

$$\mathcal{F}_{\eta|\beta} = \{x_{\iota,\eta(\iota)} : \iota \in \beta\} \subseteq [\omega]^\omega$$

mit der sfip konstruiert haben, sodass für alle $\beta_0 \in \beta_1 \in \alpha$ gilt $\mathcal{F}_{\eta|\beta_0} \subseteq \mathcal{F}_{\eta|\beta_1}$. Um $\mathcal{F}_\eta$ zu konstruieren betrachten wir zwei Fälle:

- <u>α Limesordinalzahl</u>: In diesem Fall sei

$$\mathcal{F}_\eta = \bigcup_{\beta \in \alpha} \mathcal{F}_{\eta|\beta}.$$

Dann hat $\mathcal{F}_\eta$ die sfip, weil alle Mengen $\mathcal{F}_{\eta|\beta}$ die sfip haben.

- <u>α Nachfolgerordinalzahl</u>: $\alpha = \beta_0 + 1$

Wir betrachten die Partition $\mathcal{P}_{\beta_0} = \{Y_n : n \in \omega\}$. Es gilt dann:

entweder Fall I: Es ex. ein $n_0 \in \omega$, sodass $\mathcal{F}_{\eta|\beta_0} \cup \{Y_{n_0}\}$ die sfip hat;

oder Fall II: Für jedes $n \in \omega$ ex. eine endl. Teilfamilie $\mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{F}_{\eta|\beta_0}$ sodass

$$Y_n \cap \mathcal{E}_n = \emptyset \qquad \text{(warum } \emptyset \text{ und nicht endl.?)}$$

Wir behandeln die beiden Fälle einzeln:

Fall I: Sei $n_0 \in \omega$ so, dass $\mathcal{F}_{\eta|\beta_0} \cup \{Y_{n_0}\}$ die sfip hat.

- Sei $P_1 = Fn(Y_{n_0}, 2)$ und für $p, q \in P_1$ sei
$$p \leq q \iff p \subseteq q.$$
Dann ist die p.o. $(P_1, \leq)$ abzählbar und für jede endl. Menge $E \in fin(\beta_0)$, jedes $n \in \omega$ und jedes $\delta \in \{0,1\}$ ist
$$D_{E,n,\delta} = \{p \in P_1 : |p^{-1}(\delta) \cap \bigcap_{\imath \in E} X_{\imath,\eta(\imath)}| \geq n\}$$
offen dicht in P_1.

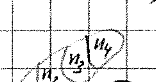
- Sei $\mathcal{D} = \{D_{E,n,\delta} : E \in fin(\beta_0) \wedge n \in \omega \wedge \delta \in \{0,1\}\}$.
Dann ist $|\mathcal{D}| \leq \max\{|\alpha|, \omega\} < \mathfrak{c}$ und mit MA(ctbl.) ex. ein $\mathcal{D}$-gen. Filter $G \subseteq P_1$.

- Für $\delta \in \{0,1\}$ sei
$$X_{\beta_0,\delta} := \bigcup \{p^{-1}(\delta) : p \in G\}.$$

- Nach Konstruktion ist dann $X_{\beta_0,\delta} \in [Y_{n_0}]^\omega$ (für $\delta \in \{0,1\}$) und $\mathcal{F}_\eta := \mathcal{F}_{\eta|\beta_0} \cup \{X_{\beta_0,\eta(\beta_0)}\}$ hat die sfip.

- Für $\eta, \eta' \in {}^\alpha 2$ mit $\eta(\beta_0) = 1 - \eta'(\beta_0)$ gilt, weil $X_{\beta_0 0} \cap X_{\beta_0 1} = \emptyset$, dass $\mathcal{F}_\eta$ und $\mathcal{F}_{\eta'}$ in keinem Ultrafilter enthalten sind.

Fall II: In diesem Fall schneidet jeder endliche Durchschnitt von Elementen aus $\mathcal{F}_{\eta|\beta_0}$ unendl. viele Y_n aus $\mathcal{P}_{\beta_0}$ (Warum?)

- Sei $P_2 \subseteq Fn(\omega, 2)$ so, dass $p \in P_2$ gdw. für alle $Y \in \mathcal{P}_{\beta_0}$ gilt:  $\to$ Fall I
$$\max\{|p^{-1}(0) \cap Y|, |p^{-1}(1) \cap Y|\} \leq 1,$$
und für $p, q \in P_2$ sei $p \leq q \iff p \subseteq q$.

- Dann ist $(P_2, \leq)$ abzählbar und für $E \in fin(\beta_0)$, $n \in \omega$, $\delta \in \{0,1\}$ ist
$$D_{E,n,\delta} := \{p \in P_2 : |p^{-1}(\delta) \cap \bigcap_{\imath \in E} X_{\imath,\eta(\imath)}| \geq n\}$$ offen dicht in P_2.

- Für $\mathcal{D} = \{D_{E,n,\delta} : E \in \text{fin}(\beta_0) \wedge n \in \omega \wedge \delta \in \{0,1\}\}$ finden wir einen $\mathcal{D}$-gen. Filter $G \subseteq \mathbb{P}_2$ und für $\delta \in \{0,1\}$ definieren wir

$$x_{\beta_0,\delta} := \bigcup \{p^{-1}(\delta) : p \in G\}.$$

- Wieder hat $\mathcal{F}_\eta := \mathcal{F}_{\eta|\beta_0} \cup \{x_{\beta_0,\eta(\beta_0)}\}$ die sfip, für alle $n \in \omega$ gilt $|x_{\beta_0,\eta(\beta_0)} \cap Y_n| \leq 1$, und kein Ultrafilter kann beide Familien $\mathcal{F}_\eta$ und $\mathcal{F}_{\eta'}$ erweitern falls $\eta(\beta_0) = 1 - \eta'(\beta_0)$.

Schliesslich sei für jedes $y \in {}^{c}2$, $\mathcal{F}_y$ der Ultrafilter der durch $\bigcup_{\alpha \in c} \mathcal{F}_{y|\alpha}$ generiert wird. Dann sind $\mathcal{F}_y$ $(y \in {}^{c}2)$ 2^c paarweise verschiedene Ramsey Ultrafilter.

$\dashv$