7 DIE FORCING-TECHNIK

- $V \models ZFC$, V heisst <u>Grundmodell</u>
- $\mathbb{P} = (P, \leq)$ eine Partialordnung, z.B. $\mathrm{Fn}(\omega, 2)$.
- <u>Ziel:</u> V mit einer Menge $G \subseteq P$, $G \notin V$ zu einem Modell $V[G] \models ZFC$ zu erweitern.

<u>Bem.</u> Obwohl $G \subseteq P$, ist $G \notin \mathcal{P}(P)$ in V!

Zu diesem Zweck führen wir zuerst $\mathbb{P}$-Namen für die Mengen der Erweiterung $V[G]$ ein, welche wir dann mit Hilfe der Menge G auswerten. Die $\mathbb{P}$-Namen sind Mengen geord. Paare im Grundmodell V; die Klasse $V^{\mathbb{P}}$ aller $\mathbb{P}$-Namen wird wie folgt definiert:

$$V_0^{\mathbb{P}} := \emptyset$$

$$V_\alpha^{\mathbb{P}} := \bigcup_{\beta \in \alpha} V_\beta^{\mathbb{P}} \quad \text{für } \alpha \text{ Limesordinalzahl}$$

$$V_{\alpha+1}^{\mathbb{P}} := \mathcal{P}(V_\alpha^{\mathbb{P}} \times P)$$

$$V^{\mathbb{P}} := \bigcup_{\alpha \in \Omega} V_\alpha^{\mathbb{P}}$$

<u>Bsp.</u>
- $\emptyset$
- $\{\langle \emptyset, p\rangle : p \in P\} = \underset{\sim}{x}$; Namen werden mit $\underset{\sim}{x}$ bezeichnet
- $\{\langle \underset{\sim}{x}, p_0\rangle : \underset{\sim}{x} \in V_\omega^{\mathbb{P}}\}$ für $p_0 \in P$
- etwas allg. $\underset{\sim}{y} = \{\langle \underset{\sim}{x}, p\rangle : \underset{\sim}{x} \in X \subseteq V_\alpha^{\mathbb{P}} \wedge p \in Y \subseteq P\}$

Rang eines $\mathbb{P}$-Namens: $rk(\emptyset) := 0$

$$rk(\underset{\sim}{x}) := \bigcup \{ rk(\underset{\sim}{y}) + 1 : \exists p \in P (\langle \underset{\sim}{y}, p\rangle \in \underset{\sim}{x})\}$$

Auswertung von $\mathbb{P}$-Namen

$\mathbb{P}$-Namen sind Mengen in V welche für Mengen in der Erweiterung $V[G]$ stehen.

Sei $G \subseteq \mathbb{P}$ (später ist G ein $\mathbb{P}$-generischer Filter).

Ist $\underset{\sim}{x}$ ein $\mathbb{P}$-Name, so ist

$$\underset{\sim}{x}[G] := \{ \underset{\sim}{y}[G] : \exists q \in G \, (\langle \underset{\sim}{y}, q \rangle \in \underset{\sim}{x}) \}.$$

Weiter ist $V[G] := \{ \underset{\sim}{x}[G] : \underset{\sim}{x} \in V^{\mathbb{P}} \}$.

Bem. · $V[G]$ ist im Allg. eine Klasse.

· Für $G = \emptyset$ ist $V[G] = \{\emptyset\}$.

- Für Mengen $x \in V$ und Mengen $G \subseteq \mathbb{P}$ führen wir folgende kanonische $\mathbb{P}$-Namen $\underset{\cdot}{x}$ und $\underset{\sim}{G}$ ein:
  - Sei $\mathbb{0}$ das minimale Elemente von $\mathbb{P}$ (falls $\mathbb{P}$ kein min. Element besitzt, führen wir eines ein). Zum Bsp. ist $\emptyset$ das min. Element von $Fn(\omega, 2)$.

  - Für $x \in V$ sei $\underset{\cdot}{x} := \{ \langle \underset{\cdot}{y}, \mathbb{0} \rangle : y \in x \}$.
    Zum Bsp. ist $\underset{\cdot}{\emptyset} = \emptyset$, $\underset{\cdot}{1} = \{ \langle \underset{\cdot}{\emptyset}, \mathbb{0} \rangle \}$, $\underset{\cdot}{2} = \{ \langle \underset{\cdot}{\emptyset}, \mathbb{0} \rangle, \langle \underset{\cdot}{1}, \mathbb{0} \rangle \}, \ldots$

Faktum: Ist $G \subseteq \mathbb{P}$ mit $\mathbb{0} \in G$, dann gilt für alle $x \in V$:

$$\underset{\cdot}{x}[G] = x$$

Bew. $\underset{\cdot}{\emptyset}[G] = \emptyset$; $rk(\underset{\cdot}{x}) = \alpha$, richtig für $rk(\underset{\cdot}{y}) \in \alpha$

$$\Rightarrow \underset{\cdot}{x}[G] = \{ \underset{\cdot}{y}[G] : y \in x \} = \{ y : y \in x \} = x.$$

  - Für $G \subseteq \mathbb{P}$ sei
$$\underset{\sim}{G} := \{ \langle \underset{\cdot}{p}, p \rangle : p \in G \}.$$

    Dann ist $\underset{\sim}{G}[G] = G$, d.h. für $\mathbb{0} \in G$ ist $G = \underset{\sim}{G}[G] \in V[G]$.

Die Forcing-Sprache

Ein Satz φ in der Forcing-Sprache ist eine Formel erster Stufe bei der die Parameter $\mathbb{P}$-Namen sind.

Bsp. $\mathbb{P} = (Fn(\omega, 2), \subseteq)$; $p_0 = \{\langle 17, 0\rangle\}$; $\underset{\sim}{x} = \{\langle \underset{\cdot}{\emptyset}, p_0\rangle\}$.
Dann ist $\underbrace{\exists y\,(y \in \underset{\sim}{x})}_{\varphi_0}$ eine Formel in der Forcing-Sprache.

Wissen die Leute in V ob φ_0 in $V[G]$ wahr ist?

Bsp. φ_0 ist wahr in $V[G]$ gdw. $V[G] \models \exists y\,(y \in \underbrace{\underset{\sim}{x}[G]})$

$\{\underset{\sim}{z}[G] : \exists q \in G\,(\langle \underset{\sim}{z}, q\rangle \in \underset{\sim}{x})\}$

$p_0 \in G$: $\underset{\sim}{x}[G] = \{\underset{\cdot}{\emptyset}[G]\} = \{\emptyset\}$
$p_0 \notin G$: $\underset{\sim}{x}[G] = \emptyset$

D.h. ist $p_0 \in G$, so gilt $V[G] \models \varphi_0$
andernfalls gilt $V[G] \models \neg\varphi_0$

Von V aus können wir in Abhängigkeit davon, ob $p_0 \in G$ oder $p_0 \notin G$, entscheiden, ob φ_0 in der Erweiterung $V[G]$ gilt oder nicht, ohne die ganze Menge G zu kennen.

[Wir sagen dann $p_0 \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi_0$, d.h. "die Bedingung p_0 forciert den Satz φ_0 bzgl. der p.o. $\mathbb{P}$."]

Generische Erweiterungen

Im Folgenden sei $V \models ZFC$ und $\mathbb{P} = (P, \leq)$ eine p.o. in V. Um generische Filter und generische Erweiterungen zu definieren brauchen wir die Begriffe "offen", "dicht", "Filter", etc. aus Kapitel 6 (MA).

Def. Ein Filter $G \subseteq P$ heisst $\mathbb{P}$-generisch über V falls $G \cap D \neq \emptyset$ für jede offen dichte Menge $D \subseteq P$ welche in V ist.

D.h. ein Filter $G \subseteq P$ ist $\mathbb{P}$-gen. über V, wenn er jede offen dichte Menge $D \subseteq P$, $D \in V$ schneidet.

Faktum 7.1 (15.24) Sei $\mathbb{P} = (P, \leq)$ eine p.o. mit der Eigenschaft:

(*) $\forall p \in P \, \exists q_1, q_2 \in P \, (p \leq q_1 \wedge p \leq q_2 \wedge \neg \exists r \in P (q_1 \leq r \geq q_2))$

Ist $G \subseteq P$ $\mathbb{P}$-generisch über V, so ist $G \notin V$.

Bew. Sei $G \subseteq P$ $\mathbb{P}$-gen. über V. Dann ist $G \neq \emptyset$. Sei $D_0 := P \setminus G$. Dann ist D_0, weil G ein Filter ist, offen. Weiter sei $p_0 \in P$ und seien $q_1, q_2 \in P$ zwei inkomp. Bedingungen mit $p_0 \leq q_1, q_2$. Weil G ein Filter ist, gilt $|G \cap \{q_1, q_2\}| \leq 1$, d.h. mindestens eines von q_1, q_2 ist nicht in G, und somit in D_0. D.h. $D_0 \subseteq P$ ist dicht aber $G \cap D_0 = \emptyset$ woraus folgt dass D_0, und somit auch $G = P \setminus D_0$, nicht in V sind.

$\dashv$

Damit wir uns nicht um triviale Erweiterungen $V[G] = V$ kümmern müssen, verlangen wir, dass Forcing-Partialordnung $\mathbb{P}$ immer die Eigenschaft (*) hat.

Äquivalente Forcings (engl. "Forcing Notions")

Def. Zwei Forcings $\mathbb{P} = (P, \leq_P)$ und $\mathbb{Q} = (Q, \leq_Q)$ heissen äquivalent, in Zeichen $\mathbb{P} \approx \mathbb{Q}$, falls es für jeden $\mathbb{P}$-generischen Filter $G \subseteq P$ über V einen $\mathbb{Q}$-gen. Filter $H \subseteq Q$ über V gibt, sodass $V[G] = V[H]$; und umgekehrt.

Bem. "$\approx$" ist eine Äquivalenzrelation.

<u>Def.</u> Seien $\mathbb{P} = (P, \leq_P)$ und $\mathbb{Q} = (Q, \leq_Q)$ zwei Forcings.

Eine Abb. $h: P \to Q$ heisst <u>dichte Einbettung</u> falls gilt:

(a) $\forall p_0, p_1 \in P \ (p_0 \leq_P p_1 \leftrightarrow h(p_0) \leq_Q h(p_1))$

(b) $\forall q \in Q \ \exists p \in P \ (q \leq_Q h(p))$

<u>Faktum 7.2</u> (15.3) Sei $\mathbb{P} = (P, \leq_P)$ und $\mathbb{Q} = (Q, \leq_Q)$ zwei Forcings.

Ist $h: P \to Q$ eine dichte Einbettung (in V), so ist $\mathbb{P} \approx \mathbb{Q}$.

<u>Beweis:</u> Sei $G \subseteq P$ ein $\mathbb{P}$-generischer Filter über V und sei

$$H := \{ q \in Q : \exists p \in G \ (q \leq_Q h(p)) \}$$

<u>Beh:</u> H ist $\mathbb{Q}$-gen. über V.

<u>Bew:</u> · H ist ein Filter: ∘ H ist nach unten abg. per Definition.

∘ H ist directed weil G bzw. $h[G]$ directed ist.

· Sei $D \subseteq Q$ offen dicht und sei

$$E := \{ p \in P : \exists q \in D \ (q \leq_Q h(p)) \}.$$

<u>Dann ist $E \subseteq P$ offen dicht:</u>

∘ E offen folgt aus (a).

∘ E dicht: Sei $p_0 \in P$ und $q_0 := h(p_0)$. Weil D dicht ist ex. $q_1 \in D$ mit $q_1 \geq_Q q_0$ und mit (b) ex. $p_1 \in P$ mit $h(p_1) \geq_Q q_1 \geq_Q q_0 = h(p_0)$. D.h. $p_1 \geq p_0$ und weil $h(p_1) \geq_Q q_1 \in D$ ist $p_1 \in E$.

· Weil G $\mathbb{P}$-gen. ist ex. ein $p \in G \cap E$. D.h. es ex. $q \in D$ mit $\underbrace{q \leq_Q h(p) \text{ und } p \in G}_{\Rightarrow\, q \in H}$. Also ist

$q \in D \cap H$ und $H \cap D \neq \emptyset$.

$\dashv_{\text{Beh.}}$

Sei nun H $\mathbb{Q}$-gen. über V und sei

$$G := \{ p \in P : h(p) \in H \}.$$

<u>Beh.</u> G ist $\mathbb{P}$-gen. über V.

<u>Bew.</u> - G ist ein Filter: ∘ G ist nach unten abg. wegen (a) und weil H nach unten abg. ist.

∘ G ist directed: [siehe unten]

· Sei $D \subseteq P$ offen dicht und sei

$$E := \{ q \in Q : \exists p \in D \, (q \geq_Q h(p)) \}.$$

Dann ist $E \subseteq Q$ offen dicht.

∘ E ist offen weil D offen ist.

∘ E dicht: Sei $q_0 \in Q$ und $p_0 \in P$ mit $q_0 \leq_Q h(p_0)$.
Weiter sei $p_1 \geq_P p_0$ mit $p_1 \in D$ und sei $q_1 := h(p_1)$.
Dann ist $q_0 \leq q_1$ mit $q_1 \in E$.

· Weil H $\mathbb{Q}$-gen. ist ex. ein $q \in H \cap E$. D.h. es ex. ein $p \in P$ mit $p \in D$ und $h(p) = q \in H$. Somit ist $p \in G \cap D$, d.h. $G \cap D \neq \emptyset$.

$\dashv$ Beh.

Weil $\mathbb{P}, \mathbb{Q}, h \in V$ gilt $V[G] = V[H]$, also $\mathbb{P} \approx \mathbb{Q}$.

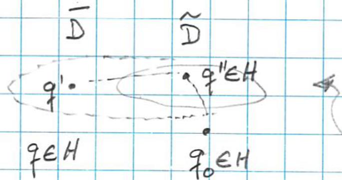
$\dashv$

G directed: Seien $p_1, p_2 \in P$ mit $\underbrace{h(p_1)}_{q_1}, \underbrace{h(p_2)}_{q_2} \in H$, d.h. $p_1, p_2 \in G$.

· Weil H directed ist ex. $q_0 \geq_Q q_1, q_2$ mit $q_0 \in H$.

· Sei $\tilde{D} := \{ q \in Q : \exists p \in P \, (q \geq_Q h(p) \geq_Q q_0 \}$. Dann ist $\tilde{D} \subseteq Q$ offen und <u>dicht oberhalb</u> von q_0, d.h.

$$\forall q \geq_Q q_0 \; \exists \tilde{q} \geq_Q q \, (\tilde{q} \in \tilde{D}).$$



$\tilde{D} \subseteq \bar{D}$ offen dicht in Q

$q' \leq q'' \geq q_0$

· Weil $q_0 \in H$ und $\tilde{D}$ offen dicht ist oberhalb von q_0, ist $H \cap \tilde{D} \neq \emptyset$. Sei $h(p_0) \in H \cap \tilde{D}$. Dann ist $h(p_0) \geq q_0 \geq q_1, q_2$, d.h. $p_0 \geq p_1, p_2$ und $p_0 \in G$.

Anti-symmetrische p.o.

Faktum 7.3 (15.5) Sei $\mathbb{P} = (P, \leq)$ ein Forcing und sei $\sim$ die Äquivalenzrelation auf P definiert durch

$$p \sim q :\Leftrightarrow p \leq q \wedge q \leq p.$$

Weiter sei $\tilde{\mathbb{P}} := (\tilde{P}, \preccurlyeq)$, wobei $\tilde{P} = \{[p]^\sim : p \in P\}$ und

$$[p]^\sim \preccurlyeq [q]^\sim :\Leftrightarrow p \leq q.$$

Dann ist $\tilde{\mathbb{P}}$ anti-symmetrisch und $\tilde{\mathbb{P}} \approx \mathbb{P}$.

Beweis: $\preccurlyeq$ ist wohldefiniert: $\underbrace{p \sim p'}, \underbrace{q \sim q'}$, $[p]^\sim \preccurlyeq [q]^\sim$ d.h. $p \leq q$.

$$p' \leq p, \quad q \leq q' \Rightarrow p' \leq q' \Rightarrow [p']^\sim \preccurlyeq [q']^\sim.$$

- Weiter ist $\tilde{\mathbb{P}}$ ein Forcing (weil $\mathbb{P}$ ein Forcing ist).
- Wir definieren nun $h : P \to \tilde{P}$ durch $h(p) := [p]^\sim$. Dann ist h eine dichte Einbettung und somit ist $\mathbb{P} \approx \tilde{\mathbb{P}}$.
- Weiter folgt aus $[p]^\sim \preccurlyeq [q]^\sim$ und $[q]^\sim \preccurlyeq [p]^\sim$, dass $p \leq q$ und $q \leq p$, d.h. $p \sim q$, also $[p]^\sim = [q]^\sim$. ⊣

Alternative Definitionen von $\mathbb{P}$-gen. Filtern

Faktum 7.4 (15.6) Sei $\mathbb{P} = (P, \leq)$ ein Forcing mit $\mathbb{P} \in V \models ZFC$.

Dann sind die folgenden Aussagen für Filter $G \subseteq P$ äquivalent:

(a) G ist $\mathbb{P}$-generisch ~~über~~ über V.

(b) G schneidet jede max. Antikette $A \subseteq P$ mit $A \in V$.

(c) G schneidet jede dichte Teilmenge $D \subseteq P$ mit $D \in V$.

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b) Sei $A \subseteq P$ eine max. Antikette in P. Dann ist $D_A := \{p \in P : \exists q \in A\, (p \geq q)\}$ offen dicht in P (siehe Aufgabe O. (b)). Ist G $\mathbb{P}$-gen. über V, so schneidet G die Menge D_A, und weil G nach unten abg. ist, schneidet G auch A.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sei $D \subseteq P$ dicht in P und $A_D \subseteq D$ eine max. Antikette in D. Dann ist A_D eine max. Antikette in P (siehe Aufgabe 0. (a)). Schneidet G jede max. Antikette in P, so schneidet G auch A_D, also auch A_D.

(c) $\Rightarrow$ (a) Schneidet G jede dichte Menge in P, so auch jede offen dichte Menge in P. $\dashv$

<u>Faktum 7.5</u> (15.7) Sei $\mathbb{P}$ ein Forcing in V, sei G ein Filter und sei $p_0 \in G$. Dann ist G $\mathbb{P}$-gen. über V gdw. G jede Menge $D \subseteq P$ ($A \subseteq P$) schneidet, welche dicht über p_0 (Antikette über p_0) ist.

<u>Bew.</u> Folgt direkt aus Def. von dicht über p_0 und Fkt. 7.4. $\dashv$

Ist der Filter $G \subseteq P$ $\mathbb{P}$-gen. über V, dann ist die Klasse $V[G]$ eine <u>generische Erweiterung</u> ($\mathbb{P}$-gen. Erw.) <u>von V</u>, bzw. $V[G]$ ist ein <u>generisches Modell</u>.

<u>Grundmodell</u>

Zwei Forcing-Partialordnungen:

- Cohen Forcing $\mathbb{C}_\kappa$: $\mathbb{C}_\kappa = (\mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2), \subseteq)$
- Ultrafilter Forcing $\mathbb{U}$: $\mathbb{U} = ([\omega]^\omega, {}^*\supseteq)$

7.1 Die Forcing-Relation

(Grundmodell $V \models ZFC$)

Sei $\mathbb{P} = (P, \leq)$ eine Forcing p.o. und sei φ eine Formel in der Forcing-Sprache. Für eine Bedingung $p \in P$ schreiben wir $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$ und sagen "p forciert φ".

Die Forcing-Relation "$\Vdash_{\mathbb{P}}$" soll folgende Eigenschaften haben:

- $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$ impliziert, dass für alle $\mathbb{P}$-gen. Filter $G \subseteq P$ mit $p \in G$ gilt: $V[G] \models \varphi[G]$.
- Ist G ein $\mathbb{P}$-gen. Filter über V und gilt $V[G] \models \varphi[G]$, so ex. ein $p \in G$ mit $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$.

Definition 7.6 (15.8) Sei $p_0 \in P$ eine Bedingung, sei $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine Formel mit den freien Variablen $x_1, \dots, x_n$, und seien $\underset{\sim}{x}_1, \dots, \underset{\sim}{x}_n \in V^{\mathbb{P}}$ irgend welche $\mathbb{P}$-Namen.
Dann ist $p_0 \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\underset{\sim}{x}_1, \dots, \underset{\sim}{x}_n)$ mit Induktion über der Komplexität der Formel φ wie folgt definiert:

(a) $\varphi(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2) = (\underset{\sim}{x}_1 = \underset{\sim}{x}_2)$: $p_0 \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{x}_1 = \underset{\sim}{x}_2$ gdw.

(α) für jedes $\langle \underset{\sim}{y}_1, s_1 \rangle \in \underset{\sim}{x}_1$ ist die Menge

$$\{ q \geq p_0 : q \geq s_1 \rightarrow \exists \langle \underset{\sim}{y}_2, s_2 \rangle \in \underset{\sim}{x}_2 \, (q \geq s_2 \wedge q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{y}_1 = \underset{\sim}{y}_2) \}$$

dicht oberhalb von p_0, und

(β) für jedes $\langle \underset{\sim}{y}_2, s_2 \rangle \in \underset{\sim}{x}_2$ ist die Menge

$$\{ q \geq p_0 : q \geq s_2 \rightarrow \exists \langle \underset{\sim}{y}_1, s_1 \rangle \in \underset{\sim}{x}_1 \, (q \geq s_1 \wedge q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{y}_2 = \underset{\sim}{y}_1) \}$$

dicht oberhalb von p_0.

(b) $\varphi(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2) \equiv (\underset{\sim}{x}_1 \in \underset{\sim}{x}_2)$: $p_0 \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{x}_1 \in \underset{\sim}{x}_2$ gdw. die Menge

$$\{q \geq p_0 : \exists \langle \underset{\sim}{y}, s\rangle \in \underset{\sim}{x}_2 \, (q \geq s \wedge q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{y} = x_1)\}$$

dicht ist oberhalb von p_0.

(c) $\varphi(\underset{\sim}{x}_1, \ldots, \underset{\sim}{x}_n) \equiv \neg\psi$: $p_0 \Vdash_{\mathbb{P}} \neg\psi$ gdw. falls für alle $q \geq p_0$ gilt:

$$q \not\Vdash_{\mathbb{P}} \psi,$$

d.h. für kein $q \geq p_0$ gilt $q \Vdash_{\mathbb{P}} \psi$.

(d) $\varphi(\underset{\sim}{x}_1, \ldots, \underset{\sim}{x}_n) \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2$: $p_0 \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi_1 \wedge \varphi_2$ gdw.

$$p_0 \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi_1 \text{ und } p_0 \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi_2.$$

(e) $\varphi(\underset{\sim}{x}_1, \ldots, \underset{\sim}{x}_n) \equiv \exists z \, \varphi(z)$: $p_0 \Vdash_{\mathbb{P}} \exists z \, \varphi(z)$ gdw. die Menge

$$\{q \geq p_0 : \exists \underset{\sim}{z} \in V^{\mathbb{P}} \, (q \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\underset{\sim}{z}))\}$$

dicht ist oberhalb von p_0.

<u>Faktum 7.7</u> (15.9) Für jeden Satz φ der Forcing-Sprache gilt:

(a) Falls $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$ und $q \geq p$, dann $q \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$.

(b) Die Menge $\Delta_\varphi := \{p \in P : (p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi) \vee (p \Vdash_{\mathbb{P}} \neg\varphi)\}$ ist offen dicht in P.

<u>Beweis:</u> (a) folgt direkt aus der Definition.

(b) Für jedes $p \in P$ gibt es entweder ein $q \geq p$ mit $q \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$, oder für alle $q \geq p$ gilt $q \not\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$. Im ersten Fall haben wir $q \in \Delta_\varphi$, im zweiten Fall haben wir $p \Vdash_{\mathbb{P}} \neg\varphi$, also $p \in \Delta_\varphi$.

$\dashv$

[Wir zeigen nun, dass die Forcing-Relation die gewünschten Eigensch. hat.]

Theorem 7.8 (15.10) Das Forcing-Theorem. Sei $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine Formel erster Stufe mit $\mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$. Sei $V \models ZFC$, $\mathbb{P} = (P, \leq)$ eine Forcing p.o. in V, $\underset{\sim}{x}_1, \dots, \underset{\sim}{x}_n \in V^{\mathbb{P}}$ beliebige $\mathbb{P}$-Namen, und sei $G \subseteq P$ ein $\mathbb{P}$-generischer Filter über V.

(1) Ist $p \in G$ und $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\underset{\sim}{x}_1, \dots, \underset{\sim}{x}_n)$, dann gilt $V[G] \models \varphi(\underset{\sim}{x}_1[G], \dots, \underset{\sim}{x}_n[G])$.

(2) Gilt $V[G] \models \varphi(\underset{\sim}{x}_1[G], \dots, \underset{\sim}{x}_n[G])$, dann ex. ein $p \in G$ mit $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\underset{\sim}{x}_1, \dots, \underset{\sim}{x}_n)$.

Beweis: Mit Ind. über die Komplexität von φ, wobei wir für atomare Formeln eine Doppelinduktion (für den Rang der Namen) machen müssen. Wir zeigen Thm. 7.8 nur für atomare Formeln, für nicht-atomare Formeln ist der Beweis einfacher.

$\varphi(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2) \equiv (\underset{\sim}{x}_1 = \underset{\sim}{x}_2)$: Der Beweis ist mit transfiniter Induktion über $\underline{rk}(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2) := \max\{rk(\underset{\sim}{x}_1), rk(\underset{\sim}{x}_2)\}$.

- Ist $\underline{rk}(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2) = 0$, dann ist $\underset{\sim}{x}_1 = \underset{\sim}{x}_2 = \emptyset$. Weil $\emptyset[G] = \emptyset$ und weil für alle $p \in P$ gilt $p \Vdash_{\mathbb{P}} \emptyset = \emptyset$, erhalten wir (1) und (2).

Für $\underline{rk}(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2) > 0$ behandeln wir (1) und (2) einzeln.

(1): Sei $p \in G$ mit $p \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{x}_1 = \underset{\sim}{x}_2$. Wir nehmen an, dass (1) gilt für alle $\mathbb{P}$-Namen $\underset{\sim}{y}_1, \underset{\sim}{y}_2$ mit $\underline{rk}(\underset{\sim}{y}_1, \underset{\sim}{y}_2) < \underline{rk}(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2)$.
Wir zeigen $\underset{\sim}{x}_1[G] = \underset{\sim}{x}_2[G]$ mit (α) von Def. 7.6.(a),

dadurch, dass wir $\underset{\sim}{x}_1[G] \subseteq \underset{\sim}{x}_2[G]$ zeigen; analog zeigt man $\underset{\sim}{x}_2[G] \subseteq \underset{\sim}{x}_1[G]$ mit Def. 7.6. (a). (β).

- Jedes Element aus $\underset{\sim}{x}_1[G]$ ist von der Form $\underset{\sim}{y}_1[G]$, wobei $\langle \underset{\sim}{y}_1, s_1\rangle \in \underset{\sim}{x}_1$ mit $s_1 \in G$. Wir müssen zeigen, dass $\underset{\sim}{y}_1[G] \in \underset{\sim}{x}_2[G]$.
- Weil G directed ist ex. $r \in G$ mit $s_1 \leq r \geq p$, und mit Faktum 7.7(a) gilt $r \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{x}_1 = \underset{\sim}{x}_2$.
- Mit Def. 7.6. (a). (α) und Faktum 7.5 ex. $q \in G$ mit $q \geq r \geq s_1$, sodass gilt:

$$\exists \langle \underset{\sim}{y}_2, s_2\rangle \in \underset{\sim}{x}_2 \, (q \geq s_2 \wedge q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{y}_1 = \underset{\sim}{y}_2) \qquad (\exists)$$

- Sei $\langle \underset{\sim}{y}_2, s_2\rangle$ wie in ($\exists$). Dann ist $\underline{rk}(\underset{\sim}{y}_1, \underset{\sim}{y}_2) < \underline{rk}(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2)$ und mit unserer Annahme erhalten wir $\underset{\sim}{y}_1[G] = \underset{\sim}{y}_2[G]$.
- Weil G nach unten abg. ist und $q \geq s_2$, ist $s_2 \in G$, d.h. $\underset{\sim}{y}_2[G] \in \underset{\sim}{x}_2[G]$ und damit ist $\underset{\sim}{y}_1[G] \in \underset{\sim}{x}_2[G]$.

(2): Um (2) zu zeigen nehmen wir an $\underset{\sim}{x}_1[G] = \underset{\sim}{x}_2[G]$, und dass (2) gilt für alle $\underset{\sim}{y}_1, \underset{\sim}{y}_2$ mit $\underline{rk}(\underset{\sim}{y}_1, \underset{\sim}{y}_2) < \underline{rk}(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2)$.

- Sei $D_{\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2} \subseteq P$ die Menge aller Bedingungen $r \in P$, sodass entweder $r \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{x}_1 = \underset{\sim}{x}_2$, oder wir in einem der folgenden Fälle sind:

(α') es ex. $\langle \underset{\sim}{y}_1, s_1\rangle \in \underset{\sim}{x}_1$, sodass $r \geq s_1$ und

inkomp.

$$\forall \langle \underset{\sim}{y}_2, s_2\rangle \in \underset{\sim}{x}_2 \; \forall q \in P \left((q \geq s_2 \wedge q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{y}_1 = \underset{\sim}{y}_2) \rightarrow q \perp r \right)$$

(β') es ex. $\langle \underset{\sim}{y}_2, s_2\rangle \in \underset{\sim}{x}_2$, sodass $r \geq s_2$ und

$$\forall \langle \underset{\sim}{y}_1, s_1\rangle \in \underset{\sim}{x}_1 \; \forall q \in P \left((q \geq s_1 \wedge q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{y}_1 = \underset{\sim}{y}_2) \rightarrow q \perp r \right)$$

- Wir zeigen nun, dass keine Bedingung $r \in G$ (α') oder (β') erfüllen kann; wir zeigen dies nur für (α'), (β') ist analog.

- Sei $r \in G$ und sei $\langle \underset{\sim}{y_1}, s_1 \rangle \in \underset{\sim}{x_1}$ wie in (α').
  Dann ist $s_1 \in G$ und somit $\underset{\sim}{y_1}[G] \in \underset{\sim}{x_1}[G] \underset{\uparrow \text{Annahme}}{=} \underset{\sim}{x_2}[G]$.
- Sei $\langle \underset{\sim}{y_2}, s_2 \rangle \in \underset{\sim}{x_2}$ mit $s_2 \in G$ und $\underset{\sim}{y_1}[G] = \underset{\sim}{y_2}[G]$.
  Weil $\underline{\mathrm{rk}}(\underset{\sim}{y_1}, \underset{\sim}{y_2}) < \underline{\mathrm{rk}}(\underset{\sim}{x_1}, \underset{\sim}{x_2})$, ex. $q_0 \in G$ mit $q_0 \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{y_1} = \underset{\sim}{y_2}$, und weil G directed ist ex. $q \in G$ mit $s_2 \leq q \geq q_0$.
  Mit Faktum 7.7.(a) erhalten wir somit $q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{y_1} = \underset{\sim}{y_2}$ und mit (α') gilt $q \perp r$, was ein Widerspruch zu $q, r \in G$ ist.

- Wenn es nun kein $r \in G$ gibt mit $r \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{x_1} = \underset{\sim}{x_2}$, dann ist $D_{\underset{\sim}{x_1}, \underset{\sim}{x_2}} \cap G = \emptyset$. Es genügt also zu zeigen, dass $D_{\underset{\sim}{x_1}, \underset{\sim}{x_2}}$ dicht in P ist (weil G jede dichte Menge schneidet und (α') und (β') für den Durchschnitt nicht in Frage kommen).

$D_{\underset{\sim}{x_1}, \underset{\sim}{x_2}} \subseteq P$ dicht in P: Sei $p \in P$ beliebig. Gesucht $r \geq p$ in $D_{\underset{\sim}{x_1}, \underset{\sim}{x_2}}$.
  - Für p haben wir entweder $p \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{x_1} = \underset{\sim}{x_2}$ (d.h. $p \in D_{\underset{\sim}{x_1}, \underset{\sim}{x_2}}$), oder (α) oder (β) von Def. 7.6.(a) ist nicht erfüllt.
  - Ist (α) nicht erfüllt, dann ex. $\langle \underset{\sim}{y_1}, s_1 \rangle \in \underset{\sim}{x_1}$ und $r \geq p$, sodass für alle $q \geq r$ gilt:
  $$\forall \langle \underset{\sim}{y_2}, s_2 \rangle \in \underset{\sim}{x_2} \left(\neg \left(q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{y_1} = \underset{\sim}{y_2} \wedge q \geq s_2 \right) \right) \qquad (\forall)$$
  - Ist $\langle \underset{\sim}{y_2}, s_2 \rangle \in \underset{\sim}{x_2}$, $q \geq s_2$, $q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{y_1} = \underset{\sim}{y_2}$, dann ist $q \perp r$, denn $r \leq q' \geq q$ würde $(\forall)$ widersprechen.
  - Somit erfüllt r die Bedingung (α'), d.h. $r \in D_{\underset{\sim}{x_1}, \underset{\sim}{x_2}}$ und $r \geq p$.
  - Ist (β) nicht erfüllt, so erhalten wir ebenfalls ein $r \geq p$ mit $r \in D_{\underset{\sim}{x_1}, \underset{\sim}{x_2}}$; also ist $D_{\underset{\sim}{x_1}, \underset{\sim}{x_2}} \subseteq P$ dicht.

- Weil nun $p \in G$ und $D_{\underset{\sim}{x_1}, \underset{\sim}{x_2}}$ dicht in P ist, ex. $r \in G \cap D_{\underset{\sim}{x_1}, \underset{\sim}{x_2}}$, und weil $r \in G$ weder (α') noch (β') erfüllt, gilt $r \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{x_1} = \underset{\sim}{x_2}$.

$\varphi(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2) \equiv (\underset{\sim}{x}_1 \in \underset{\sim}{x}_2)$:

(1): Sei $p \in G$ mit $p \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{x}_1 \in \underset{\sim}{x}_2$. Dann ist mit Def. 7.6.(b) die Menge

$$D_p = \{q \in P : \exists \langle \underset{\sim}{y}, s\rangle \in \underset{\sim}{x}_2 \, (q \geq s \wedge q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x}_1)\}$$

dicht oberhalb von p.

- Sei $q \in G \cap D_p$ und sei $\langle \underset{\sim}{y}, s\rangle \in \underset{\sim}{x}_2$ mit $q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x}_1$. Weil $q \geq s$ ist auch $s \in G$ und mit $\langle \underset{\sim}{y}, s\rangle \in \underset{\sim}{x}_2$ erhalten wir $\underset{\sim}{y}[G] \in \underset{\sim}{x}_2[G]$.
- Mit $q \in G$ und $q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x}_1$ erhalten wir mit (1) für $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x}_1$, dass gilt: $\underset{\sim}{y}[G] = x_1[G]$.

  Somit haben wir $\underset{\sim}{x}_1[G] \in \underset{\sim}{x}_2[G]$.

(2): Sei nun $\underset{\sim}{x}_1[G] \in \underset{\sim}{x}_2[G]$. Nach Def. von $\mathbb{P}$-Namen ex. ein $\langle \underset{\sim}{y}, s\rangle \in \underset{\sim}{x}_2$, sodass $s \in G$ und $\underset{\sim}{y}[G] = \underset{\sim}{x}_1[G]$.

- Mit (2) für $\underset{\sim}{y}[G] = \underset{\sim}{x}_1[G]$ ex. $r \in G$, sodass

$$r \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x}_1.$$

- Sei nun $p \in G$ mit $s \leq p \geq r$. Dann gilt

$$\forall q \geq p \, (q \geq s \wedge q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{y} \in \underset{\sim}{x}_2 \wedge \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x}_1)$$

also $p \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{x}_1 \in \underset{\sim}{x}_2$.

$\dashv$

<u>Lemma 7.9</u> (15.11) Sei $\mathbb{P} = (P, \leq)$ eine Forcing p.o., sei G ein $\mathbb{P}$-gen. Filter über V und sei $p \in G$.

(a) Falls $p \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{z} \in \underset{\sim}{y}$, dann ex. $\mathbb{P}$-Name $\underset{\sim}{x}$ mit $rk(\underset{\sim}{x}) < rk(\underset{\sim}{y})$ und eine $\mathbb{P}$-Bed. $q \geq p$ mit $q \in G$ und $q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{x}$.

(b) Falls $p \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{f} \in {}^{\underset{\sim}{A}}\underset{\sim}{B} \wedge \underset{\sim}{x}_0 \in \underset{\sim}{A}$, dann ex. $\langle \underset{\sim}{y}, r\rangle \in \underset{\sim}{B}$ mit $r \in G$ und eine $\mathbb{P}$-Bed. $q \geq p$ mit $q \in G$ sodass

$$q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}_0) = \underset{\sim}{y}.$$

Beweis: (a) Aus $p \in G$ folgt $V[G] \models \underset{\sim}{z}[G] \in \underset{\sim}{y}[G]$, und weil $\underset{\sim}{y}[G] = \{\underset{\sim}{x}[G] : \langle \underset{\sim}{x}, r\rangle \in \underset{\sim}{y} \wedge r \in G\}$, ex. $\langle \underset{\sim}{x_0}, r\rangle \in \underset{\sim}{y}$ mit $r \in G$, sodass $\underset{\sim}{x_0}[G] = \underset{\sim}{z}[G]$, wobei $rk(\underset{\sim}{x_0}) < rk(\underset{\sim}{y})$.

- Weil nun $V[G] \models \underset{\sim}{x_0}[G] = \underset{\sim}{z}[G]$ ex. $p' \in G$ mit $p' \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{x_0}$, und weil G directed ist und $p', p \in G$, ex. $q \in G$ mit $p' \leq q \geq p$, d.h. $q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{x_0}$.

(b) Weil $p \in G$, ex. eine Menge $z \in V[G]$ mit

$$V[G] \models z \in \underset{\sim}{B}[G] \wedge \langle x_0[G], z\rangle \in \underset{\sim}{f}[G].$$

- Sei $\underset{\sim}{z}$ ein $\mathbb{P}$-Name in V für z, d.h. $\underset{\sim}{z}[G] = z$.
  Mit (a) ex. $\mathbb{P}$-Name $\langle \underset{\sim}{y}, r\rangle \in \underset{\sim}{B}$ mit $r \in G$ und ein $p' \in G$ sodass $p' \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{z} \wedge \underset{\sim}{y} \in \underset{\sim}{B}$.
- Weil G directed ist ex. $q \in G$ mit $p \leq q \geq p'$, d.h.

$$q \Vdash_{\mathbb{P}} \underbrace{op(x_0, \underset{\sim}{y})}_{\{\langle\{\langle \underset{\sim}{x_0}, 0\rangle\}, 0\rangle, \langle\{\langle \underset{\sim}{x_0}, 0\rangle, \langle \underset{\sim}{y}, 0\rangle\}, 0\rangle\}} \in \underset{\sim}{f}, \quad \text{also} \quad q \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x_0}) = \underset{\sim}{y}.$$

$\dashv$

Theorem 7.10 (15.12) Das Theorem über generische Modelle

Sei $V \models ZFC$, sei $\mathbb{P} = (P, \leq)$ eine Forcing p.o. in V, und sei $G \subseteq P$ ein $\mathbb{P}$-gen. Filter über V. Dann ist $V[G] \models ZFC$. Weiter gilt:

- $V \subseteq V[G]$, $G \in V[G]$ und für jede Teilklasse $V' \subseteq V[G]$ mit $V' \models ZFC$ und $V \subseteq V'$, $G \in V'$ gilt $V' = V[G]$.
- $\Omega^{V[G]} = \Omega^{V}$, d.h. jede Ordinalzahl in $V[G]$ ist bereits in V.

[Der Beweis ist relativ aufwendig und wird hier weggelassen.]