11 Kombinieren von Forcingpartialordnungen (Ch. 18)

11.1 Produkte

Seien $\mathbb{P}_0 = (P_0 \leq_0, 0_0)$ und $\mathbb{P}_1 = (P_1 \leq_1, 0_1)$ zwei FPO.

Dann ist $\mathbb{P}_0 \times \mathbb{P}_1 = \ldots$ $\qquad p_0 \leq_0 q_0 \wedge p_1 \leq_1 q_1$.

Allg. für $\prod_{\alpha \in \kappa} \mathbb{P}_\alpha := (\bigtimes_{\alpha \in \kappa} P_\alpha, \leq, 0) \quad \ldots \quad p_\alpha \leq_\alpha q_\alpha$.

- Ist G $\prod_{\alpha \in \kappa} \mathbb{P}_\alpha$ generisch über V, so ist $G \subseteq \bigtimes_{\alpha \in \kappa} P_\alpha$ und jedes $p \in G$ ist von der Form $p = \langle p(\alpha) : \alpha \in \kappa \rangle$.
- Für $\alpha \in \kappa$ definieren wir $G(\alpha) := \{p(\alpha) : p \in G\}$.
  Damit ist $V[G] = V[\bigtimes_{\alpha \in \kappa} G(\alpha)] = V[\langle G(\alpha) : \alpha \in \kappa \rangle]$.

<u>Lemma</u> 11.1 (18.1) Sei $\prod_{\alpha \in \kappa} \mathbb{P}_\alpha$ ein Produkt von FPO $\mathbb{P}_\alpha = (P_\alpha, \leq_\alpha, 0_\alpha)$ und sei G $\prod_{\alpha \in \kappa} \mathbb{P}_\alpha$-gen. über V. Dann ist für jedes $\gamma \in \kappa$, $G(\gamma)$ $\mathbb{P}_\gamma$-generisch über $V[\langle G(\alpha) : \alpha \in \kappa \setminus \{\gamma\} \rangle]$.

<u>Beweis:</u> Es genügt das Lemma zu beweisen für $\kappa = 2$. [Warum?]
- Wir betrachten $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$: Sei $G(0)$ $\mathbb{P}$-gen. und $G(1)$ $\mathbb{Q}$-gen. über V. Zu zeigen ist, dass $G(1)$ $\mathbb{Q}$-gen. ist über $V[G(0)]$.
- Sei $\mathbb{Q} = (Q, \leq_Q)$ und sei $D \subseteq Q$ eine offen dichte Menge in $V[G(0)]$.
- In V ex. ein $\mathbb{P}$-Name $\underset{\sim}{D}$ für D und eine $\mathbb{P}$-Bed. $p_0 \in G(0)$, sodass
$$V \models p_0 \Vdash_{\mathbb{P}} \text{"}\underset{\sim}{D} \text{ ist eine offen dichte Menge von } \check{Q}\text{"}.$$

  D.h. für jedes $r \in Q$ ex. ein $\mathbb{P}$-Name $\underset{\sim}{q}$ für eine Bedingung in Q, sodass $p_0 \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{q} \geq \check{r} \wedge \underset{\sim}{q} \in \underset{\sim}{D}$.

- Sei nun
$$D_1' = \{\langle p,q\rangle \in P\times Q:\ p \geq p_0 \wedge p \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{q} \in \underset{\sim}{D}\} \subseteq P\times Q.$$

- D_1' ist dicht oberhalb von $\langle p_0, 0_Q\rangle$.

- Weil $p_0 \in G(0)$ und $G(1)$ $\mathbb{Q}$-gen. über V ist, ex. $p' \in P$ und $q' \in Q$, sodass $\langle p', q'\rangle \in D_1' \cap (G(0)\times G(1))$.

- Insbesondere ist $p' \in G(0)$ und $p' \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{q}' \in \underset{\sim}{D}$, und daraus folgt dann: $\quad V[G(0)] \models q' \in \underset{\sim}{D}[G(0)]$.

- Weil nun $q' \in G(1)$ und $\underset{\sim}{D}[G(0)] = D$, haben wir $q' \in D \cap G(1)$, d.h. $G(1) \cap D \neq \emptyset$.

$\dashv$

Def. Ist $p = \langle p(\alpha) : \alpha \in \kappa\rangle$ eine $\prod_{\alpha\in\kappa} \mathbb{P}_\alpha$ - Bedingung, wobei $\mathbb{P}_\alpha = (P_\alpha, \leq_\alpha, 0_\alpha)$, so ist $\{\alpha\in\kappa : p(\alpha) \neq 0_\alpha\} =: \mathrm{supp}(p)$ der Support von p. Ein Produkt mit endl./abz. Support ist ein Produkt, bei dem jede Bedingung endl./abz. Support hat.

Bem. $p \leq q \Rightarrow \mathrm{supp}(p) \subseteq \mathrm{supp}(q)$.

Für $\lambda \in \Omega$ sei $\mathbb{C}_\lambda = (\mathrm{Fn}(\omega\times\lambda, 2), \subseteq)$ und $\mathbb{C}^\lambda$ sei das Produkt $\mathop{\times}\limits_{\alpha\in\lambda} \mathbb{C}$ mit endl. Support.

Proposition 11.2 (18.3) Für alle Ordinalzahlen λ gilt $\mathbb{C}_\lambda \approx \mathbb{C}_{|\lambda|} \approx \mathbb{C}^{|\lambda|} \approx \mathbb{C}^\lambda$, und für abz. Ordinalzahlen γ gilt $\mathbb{C}_\gamma \approx \mathbb{C}^\gamma \approx \mathbb{C}$.

[Beweis in den Übungen]

Als Anwendung konstruieren wir ein Modell für $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}$.

Proposition 11.3 (18.5) $\omega_1 = \mathfrak{a} < \mathfrak{c}$ ist konsistent mit ZFC.

Beweis: Vorspann: $V \models ZFC + CH$, $\kappa \geq \omega_2$, G sei $\mathbb{C}_\kappa$-gen. über V.

Folgerungen: $V[G] \models \mathfrak{c} \geq \kappa$, $\omega_1^V = \omega_1^{V[G]}$

- Es genügt zu zeigen, dass es in V eine mad family $\mathcal{A}_0 \subseteq [\omega]^\omega$ gibt mit $|\mathcal{A}_0| = \omega_1$, sodass $\mathcal{A}_0$ auch eine mad family in $V[G]$ ist; wobei $\mathcal{A}_0$ sicher eine fast disjunkte Familie ist.
- Wir konstruieren in V zuerst eine mad family $\mathcal{A}_0 \subseteq [\omega]^\omega$, sodass gilt $V[g] \models$ "$\mathcal{A}_0$ ist eine mad family" für jede Cohen real g über V.
  - $\mathbb{C} = (Fn(\omega, 2), \leq)$. In V sei $\{\langle p_\xi, \underset{\sim}{x}_\xi \rangle : \omega \leq \xi \in \omega_1\}$ eine Aufzählung aller Paare $\langle p, \underset{\sim}{x} \rangle$ mit $p \in Fn(\omega, 2)$ und $\underset{\sim}{x}$ ist ein nice name für eine Teilmenge von ω, d.h. für $\langle \overset{\vee}{n}, q_1 \rangle, \langle \overset{\vee}{n}, q_2 \rangle \in \underset{\sim}{x}$ gilt entweder $q_1 = q_2$ oder $q_1 \perp q_2$.
    Weil $V \models CH$ existieren nur ω_1 solche nice names.
  - $\mathcal{A}_0 = \{A_\xi \in [\omega]^\omega : \xi \in \omega_1\}$ sei wie folgt konstruiert:
    $\{A_n \in [\omega]^\omega : n \in \omega\}$ sei eine Familie von paarweise disj. Mengen.
    Sei A_η bereits konstruiert für $\eta \in \xi$, wobei $\omega \leq \xi < \omega_1$
    Dann wählen wir $A_\xi \in [\omega]^\omega$ so, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
    (1) Für alle $\eta \in \xi$ sei $A_\eta \cap A_\xi$ endlich.
    (2) Gilt
    $$p_\xi \Vdash_{\mathbb{C}} |\underset{\sim}{x}_\xi| = \overset{\vee}{\omega} \wedge \forall \eta \in \xi \left(p_\xi \Vdash_{\mathbb{C}} |\underset{\sim}{x}_\xi \cap A_\eta| < \overset{\vee}{\omega} \right) \qquad (\ast\ast)$$
    so ist die Menge
    $$\{r \geq p_\xi : r \Vdash_{\mathbb{C}} |A_\xi \cap \underset{\sim}{x}_\xi| = \overset{\vee}{\omega}\}$$
    dicht oberhalb von p_ξ.

Beachte: Gilt $(\ast\ast)$ nicht, so müssen wir uns nur um (1) kümmern, und weil ξ abzählbar ist, ist dies kein Problem. [Warum?]

Gilt andererseits $(\ast\ast)$, dann haben wir für alle g die $\mathbb{C}$-gen. über V sind und die p_ξ enthalten:

$$V[g] \models \underset{\sim}{x}_\xi[g] \in [\omega]^\omega \wedge \forall \eta \in \xi \, (|\underset{\sim}{x}_\xi[g] \cap A_\eta| < \omega).$$

D.h. $\underset{\sim}{x}_\xi[g]$ bezeugt (in $V[g]$), dass $\{A_\eta : \eta \in \xi\}$ nicht maximal ist.

die fast disjunkte Familie

Wir konstruieren nun A_ξ, sodass $V[g] \models |\underset{\sim}{x}_\xi[g] \cap A_\xi| = \omega$:

Dafür sei $\{B_i : i \in \omega\}$ eine Aufzählung von $\{A_\eta : \eta \in \xi\}$, und sei $\{\langle n_i, q_i\rangle : i \in \omega\}$ eine Aufzählung von $\omega \times \{q : q \geq p_\xi\}$.

Mit $(\ast\ast)$ erhalten wir für jedes $i \in \omega$:

$$q_i \Vdash_{\mathbb{C}} |\underset{\sim}{x}_\xi \setminus (\dot{B}_0 \cup \ldots \cup \dot{B}_i)| = \dot{\omega}.$$

Somit finden wir eine $\mathbb{C}$-Bedingung $r_i \geq q_i$ sowie ein $m_i \geq n_i$ mit $m_i \notin B_0 \cup \ldots \cup B_i$ und $r_i \Vdash_{\mathbb{C}} \dot{m}_i \in \underset{\sim}{x}_\xi$.

Wir definieren nun

$$A_\xi := \{m_i : i \in \omega\}.$$

Mit $(\ast\ast)$ erhalten wir, dass es für jedes $q \geq p_\xi$, jedes $n \in \omega$ und jede endliche Teilmenge $\{\eta_0, \ldots, \eta_{k-1}\} \in \xi$ ein $q' \geq q$ gibt mit

$$q' \Vdash_{\mathbb{C}} \dot{m} \in \underset{\sim}{x}_\xi \wedge \dot{m} \notin \bigcup_{i \in k} \dot{A}_{\eta_i}.$$

[Warum genügt das?] Damit ist $\underset{\sim}{x}_\xi[g]$ kein Zeuge für "$\{A_\eta : \eta \in \xi + 1\}$ ist keine mad family in $V[g]$", d.h. $\mathcal{A}_0 := \{A_\xi \in [\omega]^\omega : \xi \in \omega_1\}$ ist eine mad family in $V[g]$. [$\mathcal{A}_0$ wurde durch Cohen Forcing nicht zerstört.]

- Nun zeigen wir, dass $\mathcal{A}_0$ auch eine mad family in $V[G]$ ist:

Wir betrachten die FPO $\mathbb{C}_\kappa$. Erinnerung: $\mathbb{C}_\kappa$ erfüllt ccc und $\mathbb{C}_\kappa$-Bedingungen sind endlich.

- Wir nehmen an,

$$V[G] \models \exists x \in [\omega]^\omega \, \forall A_\xi \in \mathcal{A}_0 \, (|x \cap A_\xi| < \omega).$$

Dann ex. ein $\mathbb{C}_\kappa$-Name $\underset{\sim}{x}$ für eine Teilmenge von ω und eine $\mathbb{C}_\kappa$-Bedingung p, sodass für alle $\xi \in \omega_1$ gilt

$$p \Vdash_{\mathbb{C}_\kappa} |\underset{\sim}{x}| = \dot{\omega} \wedge |\underset{\sim}{x} \cap \dot{A}_\xi| < \dot{\omega}.$$

- Wir finden nun eine abzählbare Menge $I_0 \subseteq \kappa$, sodass es bzgl. $\mathbb{C}_{I_0} := (Fn(\omega \times I_0, 2), \subseteq)$ einen nice $\mathbb{C}_{I_0}$-name $\underset{\sim}{x}_0$ und eine $\mathbb{C}_{I_0}$-Bed. p_0 gibt, sodass für alle $\xi \in \omega_1$ gilt:

$$p_0 \Vdash_{\mathbb{C}_{I_0}} |\underset{\sim}{x}_0| = \dot{\omega} \wedge |\underset{\sim}{x}_0 \cap \dot{A}_\xi| < \dot{\omega}.$$

- Mit Prp. 11.2 ist aber $\mathbb{C}_{I_0} \approx \mathbb{C}$ (weil I_0 abz. ist). Es gibt somit ein Paar $(p_{\xi_0}, \underset{\sim}{x}_{\xi_0})$, wobei p_{ξ_0} eine $\mathbb{C}$-Bed. und $\underset{\sim}{x}_{\xi_0}$ ein nice name für eine Teilmenge von ω ist, sodass für ξ_0 gilt:

$$p_{\xi_0} \Vdash_{\mathbb{C}} |\underset{\sim}{x}_{\xi_0}| = \dot{\omega} \wedge |\underset{\sim}{x}_{\xi_0} \cap \dot{A}_{\xi_0}| < \dot{\omega},$$

was aber der Konstruktion von A_{ξ_0} widerspricht.

Somit ist $\mathcal{A}_0$ eine mad family in $V[G]$ mit $|\mathcal{A}_0| = \omega_1$, und weil $V[G] \models \mathfrak{c} > \omega_1$ erhalten wir $V[G] \models \omega_1 = \mathfrak{a} < \mathfrak{c}$, d.h. $\omega_1 = \mathfrak{a} < \mathfrak{c}$ ist konsistent mit ZFC.

$\dashv$

II.2 Iterationen

Sei $\mathbb{P} = (P, \leq_P, O_P)$ eine FPO in V und sei $G_0 \subseteq P$ $\mathbb{P}$-generisch über V. Weiter sei $\mathbb{Q} = (Q, \leq_Q, O_Q)$ eine FPO in $V[G_0]$ und sei $G_1 \subseteq Q$ $\mathbb{Q}$-gen. über $V[G_0]$.

Ziel ist es die 2-Schritt gen. Erweiterung $V[G_0][G_1]$ in einem Schritt zu erhalten. D.h. wir suchen eine FPO $\mathbb{R} = (R, \leq_R, O_R) \approx \mathbb{P} * \underset{\sim}{\mathbb{Q}}$, wobei $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}$ ein $\mathbb{P}$-Name für $\mathbb{Q}$ ist, sodass für jedes $G \subseteq R$, welches $\mathbb{R}$-gen. über V ist gilt: $V[G] \approx V[G_0][G_1]$.

[Unterschied $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ und $\mathbb{P} * \underset{\sim}{\mathbb{Q}}$.]

<u>Bsp.</u> $\mathbb{U} * \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_{\mathcal{U}}$ wobei $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$ $\mathbb{U}$-gen. über V ist und $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_{\mathcal{U}}$ ein $\mathbb{U}$-Name für $\mathbb{Q}_{\mathcal{U}} = (Q_{\mathcal{U}}, \leq)$ ist, wobei

$\langle s, E \rangle \in Q_{\mathcal{U}}$: $s \in \mathrm{fin}(\omega)$ und $E \in \mathrm{fin}(\mathcal{U})$

$\langle s, E \rangle \leq \langle t, F \rangle :\Longleftrightarrow s \subseteq t \wedge E \subseteq F \wedge (t \setminus s) \in \bigcap E$

- $\mathbb{P} * \underset{\sim}{\mathbb{Q}}$ addiert eine Teilmenge $x_G \in [\omega]^\omega$ die fast homogen ist für alle 2-Färbungen $\pi : [\omega]^2 \to 2$ aus dem Grundmodell. [Warum?]

[Wie definieren wir $\mathbb{R}$, und was hat $\mathbb{R}$ für komb. Eigenschaften? z.B. ccc falls $\mathbb{P}$ & $\mathbb{Q}$ ccc?]

- Annahmen: $O_{\mathbb{P}} = O_{\mathbb{Q}} = \emptyset$, $\underset{\sim}{\mathbb{Q}} = (\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{\leq}, \underset{\sim}{\emptyset})$ $\mathbb{P}$-Namen

- Es soll gelten:

(a) $\emptyset \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{\leq})$ ist eine p.o. Menge" (transitiv & reflexiv)

(b) Falls $p \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{q} \in \underset{\sim}{Q}$ für einen $\mathbb{P}$-Namen $\underset{\sim}{q}$, so gibt es eine $\mathbb{P}$-Bed. $p' \geq p$ und $\mathbb{P}$-Namen $\underset{\sim}{r_1}$ & $\underset{\sim}{r_2}$, sodass

$$p' \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{r_1} \in \underset{\sim}{Q} \wedge \underset{\sim}{r_2} \in Q \wedge \underset{\sim}{q} \underset{\sim}{\leq} \underset{\sim}{r_1} \wedge \underset{\sim}{q} \underset{\sim}{\leq} \underset{\sim}{r_2} \wedge \underset{\sim}{r_1} \perp \underset{\sim}{r_2}.$$

(c) $\emptyset \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{\emptyset} \in \underset{\sim}{Q}$ (d) $p \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{q} \in \underset{\sim}{Q} \to p \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{\emptyset} \underset{\sim}{\leq} \underset{\sim}{q}$

Zuerst definieren wir nun $\mathbb{R}$ in V und dann zeigen wir, dass $\mathbb{R}$ die gewünschten Eigenschaften hat.

- Sei $\mathbb{R} = (R, \leq_{\mathbb{R}}, O_{\mathbb{R}})$, wobei

$$R = \{ \langle p, \underset{\sim}{q} \rangle : p \in P \wedge p \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{q} \in \underset{\sim}{\mathbb{Q}} \} \quad \text{und } O_{\mathbb{R}} := \langle \emptyset, \underset{\sim}{\emptyset} \rangle,$$

und für alle $\langle p_1, \underset{\sim}{q_1} \rangle, \langle p_2, \underset{\sim}{q_2} \rangle \in R$ sei:

$$\langle p_1, \underset{\sim}{q_1} \rangle \leq_{\mathbb{R}} \langle p_2, \underset{\sim}{q_2} \rangle :\Longleftrightarrow p_1 \leq_{\mathbb{P}} p_2 \wedge p_2 \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{q_1} \underset{\sim}{\leq} \underset{\sim}{q_2}$$

$\mathbb{R}$ ist eine FPO:

- $\leq_{\mathbb{R}}$ ist reflexiv und transitiv, zudem gibt es über jeder Bedingung inkompatible Bedingungen.
  - reflexiv: ...
  - transitiv: $\langle p_1, \underset{\sim}{q_1} \rangle \leq_{\mathbb{R}} \langle p_2, \underset{\sim}{q_2} \rangle \leq_{\mathbb{R}} \langle p_3, \underset{\sim}{q_3} \rangle \ldots$

    $\ldots \Rightarrow p_1 \leq p_3$ und $p_3 \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{q_1} \underset{\sim}{\leq} \underset{\sim}{q_3}$
- $\langle \emptyset, \underset{\sim}{\emptyset} \rangle \in R \Longleftrightarrow \emptyset \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{\emptyset} \in \underset{\sim}{Q}$ (das ist (c)), und mit (d) folgt $\langle \emptyset, \underset{\sim}{\emptyset} \rangle \leq_{\mathbb{R}} \langle p, \underset{\sim}{q} \rangle$ für alle $\langle p, \underset{\sim}{q} \rangle \in R$.

<u>Proposition 11.4</u> (18.6) Sei $V \models ZFC$ und sei G $\mathbb{R}$-gen. über V. Dann ex. Mengen $G_0, G_1 \in V[G]$, sodass G_0 $\mathbb{P}$-gen. ist über V und G_1 $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}[G_0]$-gen. ist über $V[G_0]$.

<u>Beweis:</u> Im Modell $V[G]$ definieren wir

$$G_0 := \{ p \in P : \langle p, \underset{\sim}{\emptyset} \rangle \in G \}$$

und

$$G_1 := \{ \underset{\sim}{q}[G_0] \in \underset{\sim}{Q}[G_0] : \exists p \in G_0 (\langle p, \underset{\sim}{q} \rangle \in G) \}.$$

Es ist relativ leicht zu zeigen, dass G_0, G_1 Filter ~~sind~~ sind, d.h. downward closed und directed.

Nun zeigen wir, dass G_0 und G_1 jede offen dichte Menge in V bzw. $V[G_0]$ schneidet.

- G_0 ist generisch: Sei $D_0 \subseteq P$ offen dicht und sei
$$D_0' = \{\langle p, \underset{\sim}{q}\rangle \in R : p \in D_0\}.$$
Dann ist D_0' offen dicht in R und weil G R-gen. ist, existiert $\langle p, \underset{\sim}{q}\rangle \in G \cap D_0'$, d.h. $\langle p, \emptyset\rangle \in G$ mit $p \in G_0 \cap D_0$.

- G_1 ist generisch: Sei $D_1 \subseteq \underset{\sim}{Q}[G_0]$ offen dicht und sei $\underset{\sim}{D}_1$ ein $\mathbb{P}$-Name für D_1. Dann ex. ein $p_0 \in G_0$ mit
$$p_0 \Vdash_{\mathbb{P}} \text{"}\underset{\sim}{D}_1 \text{ ist offen dicht in } \underset{\sim}{Q}\text{"}.$$
  - Nun definieren wir $D_1' := \{\langle p, \underset{\sim}{q}\rangle \in R : p \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{q} \in \underset{\sim}{D}_1\}$.
  Dann ist $D_1' \subseteq R$ offen dicht oberhalb von $\langle p_0, \emptyset\rangle \in G$ (weil $p_0 \in G_0$) und somit ist $G \cap D_1' = \emptyset$.
  - Ist $\langle p_1, \underset{\sim}{q}_1\rangle \in G \cap D_1'$, so ist $p_1 \in G_0$ und $\underset{\sim}{q}_1[G_0] \in G_1$, und weil aus der Definition von D_1' folgt $p_1 \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{q}_1 \in \underset{\sim}{D}_1$, ist $\underset{\sim}{q}_1[G_0] \in D_1$, d.h. $\underset{\sim}{q}_1[G_0] \in G_1 \cap D_1 \neq \emptyset$.

$\dashv$

<u>Allgemeine Iterationen</u>

Wir definieren nun induktiv Iterationen von FPO der Länge α für Ordinalzahlen α:

$\alpha = 1$: einfache FPO $\mathbb{P}$.

$\alpha = 2$: 2-Schritt Iteration $\mathbb{P} * \underset{\sim}{Q}$ (mit $\underset{\sim}{Q}$ $\mathbb{P}$-Name).

$\alpha = 3$:
- $\mathbb{P}_1$ FPO im Grundmodell V.
- $\underset{\sim}{Q}_1$ ein $\mathbb{P}_1$-Name für eine FPO in der $\mathbb{P}_1$-gen. Erw. von V.
- $\mathbb{P}_2 := \mathbb{P}_1 * \underset{\sim}{Q}_1$ ist ein FPO in V.
- $\underset{\sim}{Q}_2$ ein $\mathbb{P}_2$-Name für eine FPO in der $\mathbb{P}_2$-gen. Erw. von V.
- $\mathbb{P}_3 := \mathbb{P}_2 * \underset{\sim}{Q}_2$ ist eine FPO in V.

Dann ist jede $\mathbb{P}_3$-Bedingung von der Form $\langle\langle q_0, \underset{\sim}{q}_1\rangle, \underset{\sim}{q}_2\rangle$, wobei $q_0 \in P_1$, $q_0 \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{q}_1 \in \underset{\sim}{Q}_1$ und $\langle q_0, \underset{\sim}{q}_1\rangle \Vdash_{\mathbb{P}_2} \underset{\sim}{q}_2 \in \underset{\sim}{Q}_2$.

- Für $3 < \alpha < \omega$ wiederholen wir diesen Prozess, d.h. für $n \in \omega$ sind die $\mathbb{P}_n$-Bedingungen von der Form
$$\langle\langle \cdots \langle q_0, \underset{\sim}{q}_1\rangle, \underset{\sim}{q}_2\rangle \cdots \underset{\sim}{q}_{n-2}\rangle, \underset{\sim}{q}_{n-1}\rangle$$
was wir als n-Tupel $\langle q_0, \underset{\sim}{q}_1, \ldots, \underset{\sim}{q}_{n-1}\rangle$ schreiben.

- Für $n = 0$ sei $\mathbb{P}_0 := (\{\emptyset\}, \leq)$. Dann ist $G = \{\emptyset\}$ der einzige $\mathbb{P}_0$-gen. Filter über V und die 0-Schritt Iteration von V ist V.

- Die Sequenz von FPO $\mathbb{P}_0$ (wir betrachten auch $\mathbb{P}_0$ als FPO), $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$ mit $\mathbb{P}_k = (P_k, \leq, \emptyset)$ hat die Eigenschaft, dass für alle $p = \langle q_0, \underset{\sim}{q}_1, \ldots, \underset{\sim}{q}_{n-1}\rangle \in P_n$ und alle $k \in n$ gilt: $p|_k \in P_k$ und $p|_k \Vdash_{\mathbb{P}_k} \underset{\sim}{q}_k \in \underset{\sim}{Q}_k$, wobei $\underset{\sim}{Q}_k$ ein $\mathbb{P}_k$-Name für eine FPO $(Q_k, \leq)$ in der $\mathbb{P}_k$-gen. Erweiterung von V ist. Insbesondere ist $\mathbb{P}_1 = \underset{\sim}{Q}_0$ ein $\mathbb{P}_0$-Name für eine FPO $(Q_0, \leq)$ in der $\mathbb{P}_0$-gen. Erweiterung von V, wobei diese Erweiterung gleich V ist. Somit ist jede $\mathbb{P}_n$-Bedingung von der Form $\langle \underset{\sim}{q}_0, \underset{\sim}{q}_1, \ldots, \underset{\sim}{q}_{n-1}\rangle$, wobei $\underset{\sim}{q}_0$ ein $\mathbb{P}_0$-Name für eine Q_0-Bedingung ist.

- Analog definieren wir $(\alpha+1)$-Schritt Iterationen für beliebige Ordinalzahlen α: $\mathbb{P}_{\alpha+1} := \mathbb{P}_\alpha * \underset{\sim}{Q}_\alpha$.

- Für Limesordinalzahlen α erhalten wir als $\mathbb{P}_\alpha$-Bedingungen α-Sequenzen $\langle \underset{\sim}{q}_\beta : \beta \in \alpha\rangle$. Für $p = \langle \underset{\sim}{q}_\beta : \beta \in \alpha\rangle$ definieren wir
$$\mathrm{supp}(p) := \{\beta \in \alpha : \underset{\sim}{q}_\beta \neq \underset{\sim}{\emptyset}\}$$
und unterscheiden zwischen <u>endlichen</u> und <u>abzählbaren</u> Support Iterationen, d.h. Iterationen mit $|\mathrm{supp}(p)| \overset{<\omega}{\leq \omega}$ für alle p.