# 9. MENGENMODELLE VON ZFC* [Ch. 16]

## 9.1 Begriffe der Modelltheorie (Ch. 2)

- Sprache $\mathcal{L}$: Symbole (log. & nicht-logische)

$$\mathcal{L}_{ZFC} = \{\in\}$$

- Terme & Formeln: Term- & Formelaufbau

- $\mathcal{L}_{ZFC}$-Strukturen: $\underline{M} = (A, \in^M)$ mit $\in^M \subseteq A \times A$

- Zwei $\mathcal{L}_{ZFC}$-Strukturen $\underline{M} = (A, \in^M)$ und $\underline{N} = (B, \in^N)$ heissen isomorph, falls es eine Bijektion $f: A \to B$ gibt mit

$$\underbrace{a_1 \in^M a_2}_{\in A} \iff \underbrace{f(a_1) \in^N f(a_2)}_{\in B}$$

- Sind $\underline{M} \cong \underline{N}$ zwei isomorphe $\mathcal{L}$-Strukturen, so gilt für jede Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ und für alle $a_1, \dots, a_n \in A$:

$$\underline{M} \underset{\uparrow\ \varphi \text{ ist wahr in } \underline{M}}{\models} \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff \underline{N} \models \varphi(f(a_1), \dots, f(a_n))$$

- Sind $\underset{\text{Bereich } B}{\underline{N}}$ und $\underset{\text{Bereich } A}{\underline{M}}$ $\mathcal{L}$-Strukturen mit $B \subseteq A$, dann ist $\underline{N}$ eine elementare Substruktur von $\underline{M}$ ($\underline{N} \prec \underline{M}$), falls für jede Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ und alle $b_1, \dots, b_n \in B$ gilt:

$$\underline{N} \models \varphi(b_1, \dots, b_n) \iff \underline{M} \models \varphi(b_1, \dots, b_n)$$

Bsp.
- $(\mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}}) \prec (\mathbb{R}, <^{\mathbb{R}})$
- $(\mathbb{Z}, <^{\mathbb{Z}}) \not\prec (\mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}})$

$\underline{N} \prec \underline{M}$ gdw.

$\exists a \in A: \underline{M} \models \varphi(a, b_1, \dots, b_n) \iff \exists b \in B: \underline{N} \models \varphi(b, b_1, \dots, b_n)$

analog für $\forall a \in A \dots \iff \forall b \in B \dots$

## 9.2 Das Reflektionstheorem

[ Unterschied Strukturen $\leftrightarrow$ Modelle ]

Ziel: Für ein endliches Fragment ZFC* von ZFC ein Modell $\mathcal{M} = (M, \in)$ zu bilden, wobei $M$ eine Menge in $V \models ZF$ ist.

- Sei $V \models ZF$, sei $M \in V$ eine Menge und sei $\mathcal{M} = (M, \in^M)$ eine $\in$-Struktur mit Bereich $M$, wobei $\in^M = \in|_{M \times M}$.
  Im Folgenden schreiben wir $\in$ für $\in^M$. Eine $\in$-Struktur $\mathcal{M} = (M, \in)$, wobei $M$ eine Menge ist, heisst <u>Mengenmodell</u>.

- Sei nun $\mathcal{M} = (M, \in)$ ein Mengenmodell in $V \models ZF$. Mit Induktion über die Komplexität von Formeln $\varphi$ definieren wir $\mathcal{M} \models \varphi$ wie folgt:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathcal{M} \models x = y & :\Longleftrightarrow & V \models x \in M \wedge y \in M \wedge x = y \\
\mathcal{M} \models x \in y & :\Longleftrightarrow & V \models x \in M \wedge y \in M \wedge x \in y \\
\mathcal{M} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 & :\Longleftrightarrow & \mathcal{M} \models \varphi_1 \text{ und } \mathcal{M} \models \varphi_2 \\
\mathcal{M} \models \neg \varphi & :\Longleftrightarrow & \mathcal{M} \not\models \varphi \\
\mathcal{M} \models \exists x \varphi & :\Longleftrightarrow & V \models \exists x (x \in M \wedge \varphi)
\end{array}
$$

- Aus der Definition folgt, dass für jede Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ und $a_1, \dots, a_n \in M$ gilt: $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ ist dasselbe wie $V \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$, ausser dass der Bereich der Quantoren in $\varphi$ auf die Menge $M$ eingeschränkt werden.
- Ist $\Phi$ eine Menge von Formeln, dann bedeutet $\mathcal{M} \models \Phi$, $\mathcal{M} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$.
- Ist $\Phi$ eine Menge von Formeln und für jede Formel $\varphi \in \Phi$ gilt

$$\mathcal{M} \models \varphi \iff V \models \varphi$$

  dann sagen wir, die Menge $M$ <u>reflektiert $\Phi$</u>. (bzgl. $V \models ZFC$ oder $V \models ZF$)

Theorem 9.1 (Reflektionstheorem) (16.2)

Sei $ZFC^* \subseteq ZFC$ ein beliebiges endliches Fragment von ZFC.

(a) Ist $V \models ZFC$, dann ex. eine Ordinalzahl $\gamma \in \Omega^V$, sodass $V_\gamma$ die Formelmenge $ZFC^*$ reflektiert.

(b) Sei $V \models ZFC$ und sei $M_0 \in V$ eine in $V$ abz. Menge. Dann ex. eine abz. Menge $M \in V$ mit $M \supseteq M_0$, sodass $M$ reflektiert $ZFC^*$.

Beweis: Seien $\varphi_0, \dots, \varphi_m$ die Sätze aus $ZFC^*$ und sei

$$\varphi \equiv \bigwedge_{j=0}^{m} \varphi_j \quad \text{ein Satz.}$$

Nach Umbenennung der Variablen in $\varphi$ etc. können wir $\varphi$ schreiben als zu $\varphi$ äquivalenten Satz

$$\bar{\varphi} \equiv \exists y_0 \forall x_1 \exists x_1 \dots \forall x_k \exists y_k \underbrace{\varphi_0(x_1, \dots, x_k, y_0, \dots, y_k)}_{\text{ohne Quantoren}}.$$

(a) Wir starten mit einer beliebigen Menge $V_{\alpha_0}$ ($\alpha_0 \in \Omega$ beliebig) und fügen Schritt für Schritt Zeugen für Existenzaussagen hinzu. Genauer: Mit dem Transf. Rek. Thm. bilden in $V \models ZFC$ eine Sequenz $\langle \alpha_n \in \Omega : n \in \omega \rangle$ von Ordinalzahlen mit

$$\alpha_{n+1} := \bigcap \{\alpha \in \Omega : \exists y_0 \in V_\alpha \forall x_1 \in V_{\alpha_n} \dots \exists y_k \in V_\alpha \varphi_0(\dots)\}.$$

Sei $\gamma := \bigcup_{n \in \omega} \alpha_n$. Dann ist $V_\gamma = \bigcup_{n \in \omega} V_{\alpha_n}$ und $V_\gamma$ reflektiert $\bar{\varphi}$, d.h. $V_\gamma$ reflektiert $ZFC^*$ (bzgl. $V \models ZFC$).

(b) Wir führen den Beweis (a) aus in einem Modell $V \models ZFC$, wobei $M_0 \subseteq V_{\alpha_0}$ und erhalten $V_\gamma$ reflektiert $\bar{\varphi}$ bzgl. $V \models ZFC$. Mit AC erhalten wir in $V$ eine Wohlordnung "$<$" von $V_\gamma$ und für $X \subseteq V_\gamma$ sei $\mu X$ das $<$-min. Element von $X$.

Mit Induktion über $\omega$ definieren wir $M_n$ (für $n\in\omega$) wie folgt: Für jedes $i$ mit $0\le i\le k$ sei $h_{n,i}: (M_n)^i \to V_{\alpha_{n+1}}$ definiert durch

$$h_{n,i}(\langle x_1,\dots,x_i\rangle) \mapsto \mu\{y\in V_{\alpha_{n+1}}: \forall x_{i+1}\in V_{\alpha_n}\,\exists y_{i+1}\in V_{\alpha_{n+1}}\; \varphi(x_1,\dots,x_k,h_{n,0}(\emptyset),\dots, h_{n,i-1}(\langle x_1,\dots,x_{i-1}\rangle),y,y_{i+1},\dots,y_k)\}$$

und sei $M_{n+1} := M_n \cup \bigcup_{0\le i\le k} h_{n,i}[(M_n)^i]$.

Schliesslich sei $M := \bigcup_{n\in\omega} M_n$.

- Nach Konstruktion ist $M$ abzählbar und $M$ reflektiert $ZFC^*$ bzgl. $V\models ZFC$.

$\dashv$

[Bem. • $V_\gamma$ ist transitiv, alg. überabz., $M$ ist im alg. nicht transitiv, $\omega_1\in M$.
• Modelltheoretischer Kompaktheitssatz.]

## 9.3 Transitive Modelle von endl. Fragmenten von ZFC

Ein Mengenmodell $\mathbf{M}=(M,\in)$ heisst <u>extensional</u> falls für alle $x,y\in M$ gilt:

$$\mathbf{M}\models x=y \iff \mathbf{M}\models \forall z\,(z\in x \leftrightarrow z\in y)$$

D.h. $\mathbf{M}$ ist extensional gdw. $\mathbf{M}$ das Extensionalitätsaxiom erfüllt.
Z.B. ist $M=\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$ nicht extensional; $\mathbf{M}\models \emptyset = \{\{\emptyset\}\}$.

[Mengenmodelle sollen nicht nur extensional sondern auch transitiv sein.]

<u>Theorem 9.2</u> Mostowski-Kollaps (16.3)
Sei $V\models ZFC$, sei $M\in V$ eine Menge und sei $\mathbf{M}=(M,\in)$ ein extensionales Mengenmodell eines endl. Fragments $ZFC^*\subseteq ZFC$. Dann gibt es eine eindeutige Abbildung $\pi: M\to V$ (in $V$), sodass $N:=\pi[M]$ transitiv ist (in $V$) und $\mathbf{N}=(N,\in)\cong\mathbf{M}$; d.h. $x,y\in M$: $y\in x \iff \pi(y)\in\pi(x)$.

<u>Beweis</u>: Falls $M = \emptyset$, so ist $M$ bereits transitiv.

- Sei $M \neq \emptyset$. Weil $\pi[M]$ transitiv sein muss und weil für $x, y \in M$ gelten muss $y \in x \leftrightarrow \pi(y) \in \pi(x)$, erhalten wir für jedes $x \in M$: $\pi(x) = \{\pi(y) : y \in x \cap M\}$.

- Mit dem Fundierungsaxiom (in V) ex. $x_0 \in M$ mit $x_0 \cap M = \emptyset$, und weil $M$ extensional ist, ist $x_0$ das einzige Element von $M$ mit dieser Eigenschaft.

- Sei $A_0 := \{x_0\}$. Aus den Eigenschaften von $\pi$ folgt $\pi(x_0) = \emptyset$, wir können $\pi(x_0)$ nicht anders definieren.

- Ist $A_\alpha$ (für $\alpha \in \Omega$) bereits definiert und $M \setminus A_\alpha \neq \emptyset$, so sei
$$X_\alpha := \{x \in M \setminus A_\alpha : x \cap (M \setminus A_\alpha) = \emptyset\},$$
und sei $A_{\alpha+1} := A_\alpha \cup X_\alpha$.

- Für jedes $x \in X_\alpha$ gilt $\pi(x) = \{\pi(y) : y \in x \cap M\}$, und $\pi(x)$ kann nicht anders definiert werden.

- Für Limesordinalzahlen $\alpha$ sei $A_\alpha := \bigcup_{\beta \in \alpha} A_\beta$.

- Es gilt nun $M = \bigcup_{\alpha \in \lambda} A_\lambda$ für ein $\lambda \in \kappa^+$ mit $\kappa = |M|$ und wir definieren $N := \pi[M]$.

- Es ist leicht nachzuprüfen, dass $\pi : M \to N$ bijektiv ist (surj. ✓, inj. weil $M$ extensional ist), und dass $N$ transitiv ist (nach Konstruktion).

$\dashv$

<u>Korollar 9.3</u> (16.5) Für jedes endl. Fragment $ZFC^* \subseteq ZFC$ ex. ein abz. transitives Modell $\mathbf{N} = (N, \in)$ mit $N \in V \models ZFC$, sodass gilt: $\mathbf{N} \models ZFC^*$.

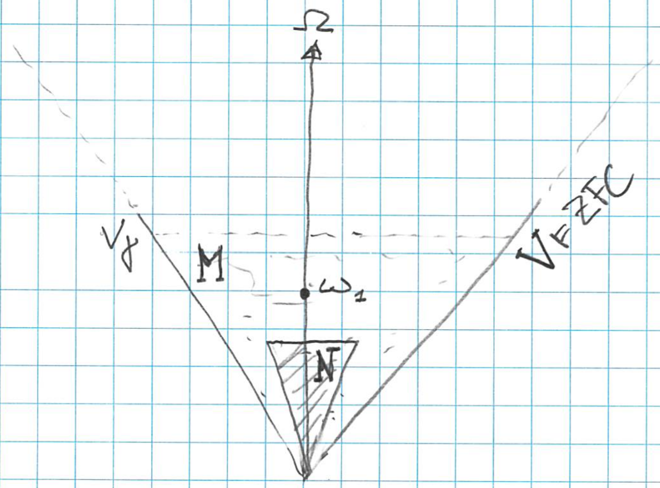
Bsp. • $M \models$ "$\lambda$ ist die kl. überabz. Ordinalzahl"; $M$ abz. Mengenmodell

• $\lambda = \omega_1$, d.h. $\omega_1 \in M$; aber $|M| \leq \omega$ (in $V \models ZFC$)

• $V \models \lambda = \omega_1 \wedge \omega_1 \in M \wedge |\lambda \cap M| \leq \omega$

• $N \models$ "$\lambda$ ist die kl. überabz. Ordinalzahl"

• $V \models \lambda \in \omega_1 \wedge \lambda \in N \wedge \lambda \cap N = \lambda$




## 9.4 Konsistenz- & Unabhängigkeitsbeweise: Der formale Weg

0. Ziel: $\mathrm{Con}(ZFC) \Rightarrow \mathrm{Con}(ZFC + \varphi)$
1. Kompaktheitssatz: $\mathrm{Con}(ZFC + \varphi)$ gdw. ... $\Phi_0 \subseteq ZFC$, $\Phi_0 + \varphi$ kons.
2. Geeignete FPO $\mathbb{P} = (P, \leq)$ mit $p_0 \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$.
3. Wahl von $ZFC^* \subseteq ZFC$:

   (a) $\Phi_0 \subseteq ZFC^*$ (b) $\mathbb{P}$ konstr. etc. (c) $\Phi_0$ gilt in $V[G]$ (d) Eigenschaften von $\mathbb{P}$ gelten in trans. Modellen
4. Konstruktion eines abz. transitiven Modells $N \models ZFC^*$
5. Relativierung von $\mathbb{P}$-gen. Filter auf $N$.
6. Relativierung vom Thm. über gen. Modelle auf $N$ (mit $p_0 \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$).
7. $N[G] \models \varphi$ (weil $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$) und $N \models \Phi_0$ nach Wahl von $ZFC^*$.
8. Aus Schritt 7 folgt $\mathrm{Con}(\Phi_0 + \varphi)$ und weil $\Phi_0$ beliebig war gilt $\mathrm{Con}(ZFC + \varphi)$.