Ferienserie

Diese Ferienserie hat kein Abgabedatum und wird nicht korrigiert. Die Lösungen werden Mitte Januar veröffentlicht.

1. Finden Sie ein Erzeugendensystem des Lösungsraumes $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^5$ des Systems

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & + & 5x_5 & = & 0 \\ x_1 & & & & & & & + & x_5 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \end{array}\right. .$$

2. Betrachten Sie die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^4$:

$$U := \{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\},$$
$$V := \{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0,\ x_1 = x_4\}.$$

Bestimmen Sie ein Erzeugendensystem von

(a) U,

(b) V,

(c) $U \cap V$.

3. Bestimmen Sie in den folgenden vier Fällen mit dem Gaussverfahren, ob die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ linear abhängig, linear unabhängig und ob sie erzeugend sind:

(a) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$

(b) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$

(c) $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}.$

(d) $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$

4. Es seien

$$\binom{x}{k} := \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

mit $\binom{x}{0} := 1$ die Binomialpolynome.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\binom{x}{k} : 0 \leq k \leq 2\}$ im Vektorraum aller Polynome linear unabhängig ist.

(b) P_2 bezeichne den Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2. Zeigen Sie, dass

$$P_2 = \operatorname{span}\left\{\binom{x}{k} : 0 \leq k \leq 2\right\}.$$

(c) Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ so, dass

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = a_0\binom{x}{0} + a_1\binom{x}{1} + a_2\binom{x}{2}$$

gilt, wenn

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Die Aufgabe (c) kann entweder durch direkte Rechnung gelöst werden oder mit Hilfe der diskreten Taylor-Formel, welche für ein Polynom $p(x)$ vom Grad n besagt, dass

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k p(0)\binom{x}{k},$$

wobei $\Delta^0 p(x) := p(x)$, $\Delta^1 p(x) := p(x+1) - p(x)$ und $\Delta^k p(x) := \Delta^1(\Delta^{k-1}p(x))$ die diskreten Differenzenoperatoren sind.

5.

(a) Wählen Sie, falls möglich, mit dem Gaussverfahren unter den folgenden sechs Vektoren mit Begründung eine Basis für $\mathbb{R}^3$ aus.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Gegeben seien die folgenden drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} a \\ a \\ 1+a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c \\ -c \\ 3-c \end{pmatrix}.$$

Wie hängt die Dimension des von diesen Vektoren aufgespannten Unterraumes von den Werten der auftretenden Parameter ab?

6. Gegeben sei die Basis $\mathcal{B} = \{b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}\}$ für $\mathbb{R}^3$, wobei

$$b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Betrachten Sie den Vektor

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Finden Sie die Koordinaten y_1, y_2, y_3, die x in der Basis $\mathcal{B}$ beschreiben, d.h.

$$x = y_1\, b^{(1)} + y_2\, b^{(2)} + y_3\, b^{(3)}.$$

(b) Es sei nun $v \in \mathbb{R}^3$ der Vektor mit Koordinaten $(1, -2, 2)^\top$ in der Basis $\mathcal{B}$. Bestimmen Sie die Koordinaten von v bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}\}$.

7. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang von A.

(b) Ermitteln Sie eine Basis für den von den Spaltenvektoren erzeugten Unterraum von $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie die Koordinaten der Spaltenvektoren in dieser Basis.

8. Durch die Polynome

$$\begin{aligned} p_1(t) &= t^3 - 2t^2 + 4t + 1, \\ p_2(t) &= t^3 + 6t - 5, \\ p_3(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1, \\ p_4(t) &= 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5 \end{aligned}$$

wird ein Vektorraum V erzeugt. Bestimmen Sie $\dim(V)$ und eine Basis von V.

9.

(a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -3 & 9 \\ 6 & 8 & -1 & 9 \\ -2 & -11 & 3-6a & -6+5a \end{pmatrix}.$$

(b) Für welche Werte des Parameters a besitzt die Matrix eine Inverse A^{-1}?

10. Gegeben sei das folgende Gleichungssystem mit dem reellen Parameter α:

$$\begin{array}{rcrcrcr} (2-\alpha)x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & -4x_2 & - & (2-\alpha)x_3 & = & -4 \\ & & (3-\alpha)x_2 & + & x_3 & = & 1. \end{array}$$

Für welche α besitzt dieses Gleichungssystem genau eine, unendlich viele, keine Lösung? Zu denjenigen α, für die das Gleichungssystem lösbar ist, bestimme man die Lösungsmenge.

11. Für welche reellen Werte von s und t hat das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & sy & + & s^2z & = & 1 \\ s^2x & + & y & + & 2tz & = & 1 \\ sx & + & s^2y & + & z & = & t \end{array}$$

keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen? Bestimmen Sie jeweils auch die Lösungsmenge.

12. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \\ -7x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 7 \end{array}$$

mit Hilfe des Gauss-Algorithmus.

13. Welche Beziehungen zwischen b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 müssen erfüllt sein, damit das folgende System lösbar ist?

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & b_1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & b_2 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & b_3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & b_4 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & b_5 \end{array}$$

14. Auf einem geschlossenen Metalldraht werden an 4 Punkten die Temperaturen x_1, x_2, x_3, x_4 gemessen. Dabei ist die Temperatur in einem der Punkte jeweils gleich dem arithmetischen Mittel der Temperaturen der beiden benachbarten Punkte.

(a) Stellen Sie ein Gleichungssystem für x_1, x_2, x_3, x_4 auf.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge davon.

15. Geben Sie für s und t Bedingungen an, so dass das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & sx_2 & & & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & sx_3 & = & t \end{array}$$

(a) keine Lösung,

(b) genau eine Lösung,

(c) unendlich viele Lösungen

besitzt. Bestimmen Sie die entsprechenden Lösungsmengen.

16. Der sogenannte **Massenausgleich zweiter Ordnung** (Link zu Animationen) einer k-Zylindermaschine liefert für die Impulse (I_1), (I_2) und die Momente (M_1), (M_2) der ersten und zweiten Ordnung folgende Bedingungen:

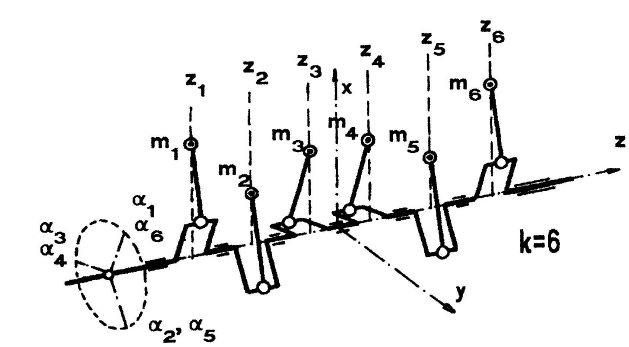
$$\sum_{i=1}^{k} m_i \sin(\alpha_i) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} m_i \cos(\alpha_i) = 0 \tag{I_1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} m_i \sin(2\alpha_i) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} m_i \cos(2\alpha_i) = 0 \tag{I_2}$$

$$\sum_{i=1}^{k} m_i z_i \sin(\alpha_i) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} m_i z_i \cos(\alpha_i) = 0 \tag{M_1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} m_i z_i \sin(2\alpha_i) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} m_i z_i \cos(2\alpha_i) = 0 \tag{M_2}$$

Dabei bezeichnen α_i die Kurbelwinkel und $m_i > 0$ die Massen. Wir nehmen weiter an, dass der Massenschwerpunkt in $z = 0$ liegt, dass $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$ und dass $k > 1$.



(a) Wie lautet die Matrix A des homogenen linearen Gleichungssystems, das die Vektoren $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)^T$ und $\vec{M} = (z_1 m_1, \dots, z_k m_k)^T$ erfüllen müssen? Warum ist $\vec{M}$ nie ein Vielfaches von $\vec{m}$? Welchen Rang darf A bei Massenausgleich höchstens haben?

(b) Bestimmen Sie A und Rang(A) und lösen Sie $Ax = 0$ für die zwei Fälle:

(i) 4-Zylinder mit Zündfolge 1-3-4-2, $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 180°$.

(ii) 6-Zylinder mit Zündfolge 1-5-3-6-2-4, $\alpha_1 = \alpha_6 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_5 = 120°$, $\alpha_3 = \alpha_4 = 240°$.

Ist in beiden Fällen Massenausgleich möglich?

(c) Gibt es für den üblichen Aufbau einer 4-Zylindermaschine

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m, \quad z_1 = -z_4 = 3z_2 = -3z_3$$

Kurbelwinkel α_i, so dass Massenausgleich zweiter Ordnung vorliegt?