Lineare Algebra I

Bonusaufgabe 6 (Lernkontrolle)

Aufgabe I Betrachten Sie eine 3×3 Matrix A und das LGS $Ax = 0$.

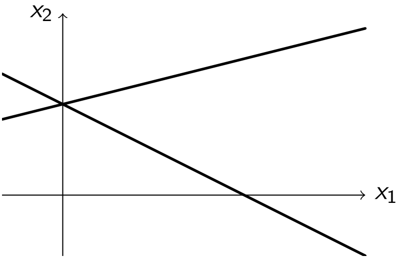
1. Hat A eine Nullzeile, so besitzt $Ax = 0$ keine Lösung. falsch
2. Ist eine Spalte von A das Vielfache einer anderen Spalte, dann besitzt $Ax = 0$ genau eine Lösung. falsch
3. Sind zwei Spalten der Matrix A gleich, so gilt $\text{Rang}(A) < 3$. wahr
4. Ist eine Zeile von A das Vielfache einer anderen Zeile, so gilt $\text{Rang}(A) < 3$. wahr

Aufgabe II Betrachten Sie das LGS $Bx = c$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & b^2 \\ 0 & b-2 & 3 \\ 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b(b-3) \end{pmatrix}.$$

5. Für $b = 3$ gilt $\mathrm{Rang}(B) = 3$. wahr
6. Für $b = 2$ gilt $\mathrm{Rang}(B) = 1$ falsch
7. Für $b = 1$ besitzt $Bx = c$ unendliche viele Lösungen. falsch
8. Für $b = 0$ besitzt $Bx = c$ eine eindeutige Lösung. wahr

Aufgabe III In der folgenden Grafik wird ein lineares Gleichungssystem $Ax = c$ veranschaulicht, wobei A eine 2×2-Matrix ist.



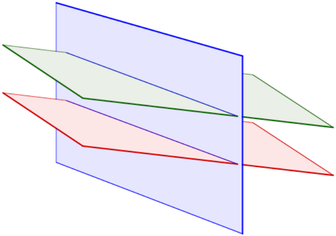
9. Für die Matrix A gilt $\mathrm{Rang}(A) = 2$. wahr

10. Das LGS $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ passt zur Abbildung. falsch

11. Das LGS $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ passt zur Abbildung. wahr

12. Das LGS $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ passt zur Abbildung. wahr

Aufgabe IV In der folgenden Grafik ist ein lineares Gleichungssystem $Bx = c$ veranschaulicht, wobei B eine 3×3-Matrix ist.



13. Der Vektor c ist der Nullvektor. falsch

14. Für die Matrix B gilt $\mathrm{Rang}(B) = 2$. wahr

15. Das lineare Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen. falsch

16. Die Matrix B enthält eine Nullzeile. falsch

Aufgabe V Betrachten Sie beliebige $n \times n$-Matrizen E, F, G, H.

17. Es gilt $(EFG)^3 = E^3 G^3 F^3$. falsch

18. Es gilt $H(G + F) + 2E = 2E + HF + HG$. wahr

19. Es gilt $(G - H)^2 = G^2 - 2GH + H^2$. falsch

20. Ist F eine Diagonalmatrix, so gilt $GF = FG$. falsch

Aufgabe VI Es sei A eine beliebige 5×5-Matrix und

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & a & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & a & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

21. Für $a = 2$, $b = 2$ und $c = 0$ gilt immer $AB = BA$. wahr
22. Für $a = 3$, $b = 1$ und $c = 0$ gilt immer $AB = BA$. falsch
23. Für $a = 0$, $b = 2$ und $c = 2$ gilt immer $AB = BA$. falsch
24. Für $a = 0$, $b = 1$ und $c = 3$ gilt immer$AB = BA$. falsch

Aufgabe VII Betrachten Sie die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

für $a > 0$.

25. Es gilt $\det(B) \neq 0$. wahr

26. Die Determinante von B ist unabhängig von a. falsch

27. Das lineare Gleichungssystem $Bx = 0$ besitzt genau eine Lösung. wahr

28. $\det(-B) = \det(B)$. falsch

Aufgabe VIII Betrachten Sie die Vekoren

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } a \times b \neq 0,$$

sowie die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

29. Es gilt $\det(M) \neq 0$. wahr

30. Das HLGS $Mx = 0$ besitzt genau eine Lösung. wahr

31. Die Fläche des von a und b aufgespannten Parallelogramms in der x_1x_2-Ebene ist ungleich Null. wahr

32. Es existiert eine reelle Zahl λ, so dass $a = \lambda b$. falsch

Aufgabe IX Betrachten Sie die folgende Menge von Vektoren im Vektorraum $\mathbb{R}^3$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}.$$

33. Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist eine Linearkombination von Vektoren aus der Menge E. — wahr
34. Jeder beliebige Vektor in $\mathbb{R}^3$ ist Linearkombination von Vektoren aus der Menge E. — falsch
35. Die Menge E ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$. — falsch
36. Die Menge E enthält eine Basis von $\mathbb{R}^3$ — falsch

Aufgabe X Betrachten Sie die Menge von Polynomen im Vektorraum $\mathcal{P}_3$

$$F = \{ \ t^3, \ t^2 - t \ , \ t^2 - 1 \ , \ t^3 - t^2 + t \ \},$$

sowie den von der Menge F aufgespannten Unterraum U von $\mathcal{P}_3$.

37. Das Polynom $2t^3 - t^2 + 2t - 1$ liegt in U. wahr

38. $\dim(U) = 2$ falsch

39. F ist eine Basis von U. falsch

40. $U = \mathcal{P}_3$. falsch