

Serie 1 - Bonusaufgabe 1

Die Abgabe der Bonusaufgabe erfolgt bis zum **Freitag, 29. September 10:00** mit dem SAM-Upload Tool (link über <https://metaphor.ethz.ch/x/2023/hs/401-0171-00L/>). Die Abgabe kann ausschliesslich in derjenigen Übungsgruppe erfolgen, in die Sie sich zu Beginn des Semesters eingeschrieben haben. Eine verspätete Abgabe ist nicht möglich. Diese Bonusaufgabe wird mit 0 oder 1 Punkt bewertet, wobei 1 Punkt vergeben wird, wenn die Bonusaufgabe sinnvoll und umfassend bearbeitet wurde.

Aufgaben zum Rang

Aufgabe 1

Betrachten Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme. Denken Sie für jedes dieser Systeme über den Informationsgehalt der einzelnen Gleichungen nach: Entscheiden Sie für jedes dieser Gleichungssysteme, **ohne zu rechnen**, ob es eine eindeutige Lösung, unendlich viele Lösungen, oder keine Lösung hat. Welche Faktoren müssen Sie bei dieser Entscheidung beachten? Begründen Sie Ihre Antworten.

(a)

$$x_1 + 2x_2 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 = 4$$

(b)

$$x_1 + 2x_2 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 = 3$$

(c)

$$x_1 + 2x_2 = 3$$

$$x_1 + x_2 = 3$$

(d)

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 8 \\3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 &= 4 \\2x_3 &= 8 \\3x_1 + 2x_2 &= 5\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\6x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 0\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\6x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 8\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Betrachten Sie erneut Ihre Resultate aus den Teilaufgaben 1f und 1g. Beschreiben Sie die Gemeinsamkeiten und Unterschiede dieser beiden linearen Gleichungssysteme. Wie wirken diese sich auf die Anzahl Lösungen der beiden Gleichungssysteme aus?

Serie 1

Aufgabe 1 ist online auf <https://echo.ethz.ch> zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 6. Oktober um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool (link über <https://metaphor.ethz.ch/x/2023/hs/401-0171-00L/>).

1. Gegeben sei das LGS (lineare Gleichungssystem)

$$\begin{array}{rcl} ax & + & y & = & a \\ x & + & ay & = & a \end{array} .$$

Welche Aussagen treffen zu?

- (a) Für $a = 2$ besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung.
- (b) Für $a = 1$ besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung.
- (c) Für $a = -1$ besitzt das Gleichungssystem keine Lösung.
- (d) Für $a = 1$ besitzt das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.
- (e) Für $a = 2$ besitzt das Gleichungssystem genau zwei Lösungen.

2. Man löse das folgende Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & b_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & b_2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 10x_4 & = & b_3 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 10x_3 & + & 20x_4 & = & b_4 \end{array}$$

mit dem Gauss-Algorithmus für die folgenden Parameter:

- (a) $b_1 = 1, b_2 = 3, b_3 = 2, b_4 = 2$;
- (b) $b_1 = 0, b_2 = -3, b_3 = 2, b_4 = 1$;
- (c) $b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 1, b_4 = 1$.

3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems mit dem Gauss-Algorithmus:

$$\begin{array}{rclcl} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 2 \end{array} .$$

4. Lösen Sie die Aufgaben **2** und **3** nochmals mit Hilfe von MATLAB.

5. (Fakultativ) Man zeige, dass zur Ausführung des Gauss-Verfahrens die Operation

(II) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

genügt.