Serie 3

Aufgabe 1 ist online auf https://echo.ethz.ch zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 20. Oktober um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool (link uber https://metaphor.ethz.ch/x/2023/hs/401-0171-00L/).

1. Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

und der Vektor

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ ist das LGS $Ax = b$ lösbar?

(a) Für alle $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

(b) Für keine $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

(c) Für alle $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ mit $b_3 + b_2 - b_1 = 0$.

(d) Für alle $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ mit $b_3 + b_2 - b_1 \neq 0$.

(e) Das lässt sich nicht entscheiden.

2. *Ebenenschnitt*

(a) Für welche Werte von t schneiden sich die vier im untenstehenden Gleichungssystem gegebenen Ebenen im $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 2t \\ 2(x & - & y) & + & t(z+1) & = & 0. \end{array}$$

(b) Das folgende MATLAB-Skript visualisiert die Lösung des LGS
$x + y - z = 5$, $x - y - z = 0$, $4x - z = 2$.

```
ezsurfc('x+y-5')
% plottet den Graphen der Funktion z=f(x,y)=x+y-5 (Sie koennen
% auch andere (zwei) Variabelnamen waehlen)
hold on
% hold dient dazu, alle Graphen in derselben Figur anzuordnen
% (Figur nicht schliessen waehrend dem Ausfuehren der Befehle)
ezsurfc('x-y')
ezsurfc('4*x-2')
hold off
```

Ändern Sie dieses Skript so ab, dass es für die im Teil **(a)** gefundenen Werte von t den Schnitt der vier Ebenen visualisiert.

3. *Multidimensionale Gleichungssysteme variabler Grösse*

(a) Lösen Sie für $n \geq 2$ das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{n} (i-k)x_i = 1 \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

(b) Lösen Sie für $n \geq 1$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_0 &= 0 \\ y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1} &= 0 \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \dots, n. \\ y_{n+1} &= 1 \end{aligned}$$

4. *Numerische Problematik bei linearen Gleichungssystemen*

(a) Lösen Sie

$$\begin{pmatrix} 1044.005 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix}.$$

(b) "Lösen" Sie mit einem gewöhnlichen Taschenrechner

$$\begin{pmatrix} 1044.0045 & 696.0028 \\ 174.0008 & 116.0005 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696.0034 \\ 116.0006 \end{pmatrix}.$$

(c) Zeigen Sie, dass jedes $\binom{x}{y}$, das zur Lösungsmenge beider Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 1044 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 45 & 28 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 6 \end{pmatrix}$$

gehört, auch eine Lösung von **(b)** ist und lösen Sie damit **(b)**.