

## Serie 5

Aufgabe 1 ist online auf <https://echo.ethz.ch> zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 3. November um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool (link über <https://metaphor.ethz.ch/x/2023/hs/401-0171-00L/>).

1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- (a) Seien  $u$  und  $v$  Lösungen des LGS  $Ax = b$  mit  $n$  Unbekannten. Der Rang des LGS sei  $r$ . Falls  $n = r$  gilt, so folgt  $u = v$ .
- (b) Sei  $Ax = 0$  ein homogenes LGS und  $x \neq 0$  eine Lösung davon. Dann ist der Rang  $r$  des Gleichungssystems gleich der Anzahl  $n$  der Unbekannten.
- (c) Sei  $Ax = b$  ein LGS, das keine Lösung besitzt. Dann ist sein Rang  $r$  grösser als die Anzahl  $m$  seiner Gleichungen.
- (d) Sei  $Ax = b$  ein LGS mit  $n$  Unbekannten und ebensovielen Gleichungen. Sei  $u \neq 0$  eine Lösung des homogenen LGS  $Ax = 0$  und  $v$  eine Lösung von  $Ax = b$ . Dann hat  $Ax = b$  noch unendlich viele weitere Lösungen.

2. *Ränge einer Menge linearer Gleichungssysteme*

Bestimmen Sie – in Abhängigkeit von  $a$  – den Rang des folgenden Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & + & (a^2 + 3a)x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & - & x_2 & + & ax_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

mit Hilfe des Gauss-Algorithmus.

3. *Kommutierende Matrizen*

Bestimmen Sie, welche Matrizen  $B$  mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

kommutieren, d.h. für welche Matrizen  $B$  die Gleichung  $AB = BA$  gilt.

#### 4. Kreuzprodukt zweier Vektoren

Es seien  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  und  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ . Dann ist das Vektorprodukt von  $x$  und  $y$  definiert als

$$x \times y := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine  $3 \times 3$ -Matrix  $B$  so, dass

$$x \times y = By.$$

(b) Zeigen Sie, dass  $x \times y$  senkrecht auf  $x$  und  $y$  steht.

(c) Rechnen Sie eine der folgenden Identitäten nach:

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c \quad (\text{Grassmann-Identität})$$

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0 \quad (\text{Jacobi-Identität})$$

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (b \cdot c)(a \cdot d) \quad (\text{Lagrange-Identität})$$

(d) Verwenden Sie die obige Lagrange-Identität um zu zeigen, dass

$$\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin(\varphi)$$

gilt, wobei  $0 \leq \varphi \leq \pi$  der von  $a$  und  $b$  eingeschlossene Winkel ist. Dieser Satz besagt, dass die Länge des Vektors  $a \times b$  gleich der Fläche des von  $a$  und  $b$  aufgespannten Parallelogramms ist.

*Hinweis:* Es gilt

$$a \cdot b = \|a\| \|b\| \cos(\varphi).$$