

# Serie 10

Aufgabe 1 ist online auf <https://echo.ethz.ch> zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 8. Dezember um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool (link über <https://metaphor.ethz.ch/x/2023/hs/401-0171-00L/>).

1. Für die vier Vektoren

$$\mathbf{a}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Matrix  $A := (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  gelten welche der folgenden Aussagen?

- (a)  $\det(A) = 0$ .
- (b) Der Rang von  $A$  ist 3.
- (c) Das Gleichungssystem  $A\mathbf{x} = 0$  hat nicht-triviale Lösungen.
- (d) Das Gleichungssystem  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  hat genau eine Lösung.
- (e) Die Lösbarkeit von  $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$  hängt von der Wahl von  $\mathbf{v}$  ab.
- (f) Die Matrix  $A$  hat eine Inverse.

2. [Prüfungsaufgabe, Frühling 2007] Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & b & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 7 & -1 & c \\ 5 & 1 & d & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie  $\det(A)$ .
- (b) Für welche Werte der Parameter  $a, b, c, d$  ist die Matrix  $A$  singulär?

### 3. Cramer'sche Regel, 1750

Sei  $A$  eine reguläre  $n \times n$ -Matrix,  $b \in \mathbb{R}^n$  ein Spaltenvektor. Ersetzt man die  $k$ -te Spalte von  $A$  durch  $b$ , erhält man eine Matrix  $A_k$ . Beweisen Sie, dass die Lösung von  $Ax = b$  durch

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

gegeben ist.

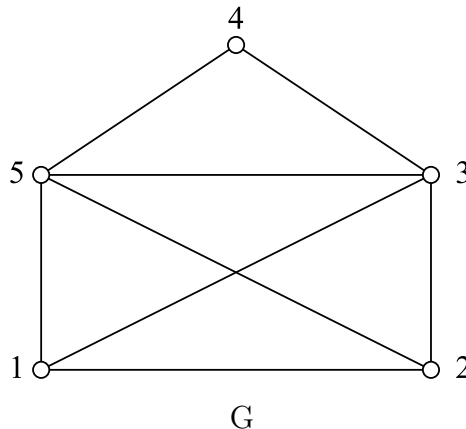
*Bemerkung:* Bezüglich des Rechenaufwandes ist die Cramer'sche Regel eine im Vergleich zum Gaussverfahren ineffiziente Methode zur Lösung linearer Gleichungssysteme.

### 4. Adjazenzmatrix und Laplace-Operator eines Graphen

Ein Graph  $G$  mit den Knoten  $1, 2, \dots, n$  wird vollständig durch seine Adjazenzmatrix  $A^G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  beschrieben, wobei der  $(i, j)$ -te Eintrag von  $A^G$  gegeben ist durch

$$(A^G)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \text{ mit } j \text{ durch eine Kante verbunden ist;} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispielsweise gehört zum untenstehenden Graph  $G$



die Adjazenzmatrix

$$A^G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei  $d_i$  der Grad des Knotens  $i$ , d.h. die Anzahl seiner Nachbarn, und

$$D^G = \text{diag}(d_1, d_2, d_3, \dots, d_n).$$

Dann heisst die Matrix

$$L^G := D^G - A^G$$

Laplace-Operator auf  $G$ .

- (a) Zeigen Sie für beliebige  $G$ , dass  $\det(L^G) = 0$  gilt.
- (b) Kirchhoff's Matrix-Tree-Theorem besagt, dass jeder Kofaktor von  $L^G$  die Anzahl der  $G$  aufspannenden Teilbäume ist. Man berechne diese Anzahl für das obige Beispiel.