

Serie 11 - Bonusaufgabe 5

Die Abgabe der Bonusaufgabe erfolgt bis zum **Freitag, 8. Dezember 10:00** mit dem SAM-Upload Tool (link über <https://metaphor.ethz.ch/x/2023/hs/401-0171-00L/>). Die Abgabe kann ausschliesslich in derjenigen Übungsgruppe erfolgen, in die Sie sich zu Beginn des Semesters eingeschrieben haben. Eine verspätete Abgabe ist nicht möglich.

Diese Bonusaufgabe wird mit 0 oder 1 Punkt bewertet, wobei 1 Punkt vergeben wird, wenn die Bonusaufgabe sinnvoll und umfassend bearbeitet wurde.

1 Aufgaben zu Basen

- (a) Betrachten Sie die Vektoren $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$. Betrachten Sie zudem die folgenden Mengen von Vektoren:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$$

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}.$$

Beantworten Sie für jede dieser Mengen die folgenden Fragen:

- (i) Ist es möglich, einen oder beide der Vektoren a und b als Linearkombination von Vektoren aus dieser Menge darzustellen?
- (ii) Falls ja, geben Sie für jeden Vektor ein konkretes Beispiel für eine solche Linearkombination. Stellen Sie dieses Beispiel zusätzlich graphisch in einem 2-dimensionalen Koordinatensystem dar.

Verwenden Sie für jede Menge jeweils ein eigenes Koordinatensystem. Begründen Sie Ihre Antworten.

Analysieren Sie Ihre obigen Resultate unter den folgenden Gesichtspunkten: Was beobachten Sie? Wie viele Vektoren scheinen Sie mindestens zu benötigen, um sowohl für a als auch für b eine Linearkombination zu finden? Welche Eigenschaften muss diese Menge von Vektoren erfüllen? Begründen Sie Ihre Antworten.

- (b) Versuchen Sie die folgende Frage mithilfe Ihrer Resultate aus der vorherigen Aufgabe zu beantworten, ohne zu rechnen. Begründen Sie ausserdem, wieso dies möglich ist.

Betrachten Sie die Polynome $p(t) = 4t + 2$ und $q(t) = 8t + 5$ sowie die folgenden Mengen:

$$A = \{2t + 1, 2, 0, 3t\}$$

$$B = \{1, t, t + 1\}$$

$$C = \{2t + 1, 8t + 4\}$$

$$D = \{2t + 1, 6t + 5\}$$

$$E = \{8t + 4\}.$$

Ist es möglich, eines oder beide der Polynome p und q als Linearkombination von Polynomen aus der jeweiligen Menge darzustellen?

Verifizieren Sie Ihre Überlegungen, indem Sie konkrete Beispiele für solche Linearkombinationen geben, falls welche existieren.

Serie 11

Aufgabe 1 ist online auf <https://echo.ethz.ch> zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 15. Dezember um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool (link über <https://metaphor.ethz.ch/x/2023/hs/401-0171-00L/>).

1. Betrachten Sie die Menge $\mathbb{R}_+^2 := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ der Paare positiver, reeller Zahlen, gegeben als Vektor

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^2 \quad \text{mit} \quad a_1 \in \mathbb{R}_+ := (0, \infty) \quad \text{und} \quad a_2 \in \mathbb{R}_+ := (0, \infty).$$

Die Addition auf \mathbb{R}_+^2 sei folgendermassen definiert:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix}.$$

Im Folgenden betrachten wir drei verschiedene Definitionen der Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. Definition: $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}.$

2. Definition: $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} e^\lambda x_1 \\ e^\lambda x_2 \end{pmatrix}.$

3. Definition: $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1^\lambda \\ x_2^\lambda \end{pmatrix}.$

Welche der folgenden Behauptungen sind korrekt?

Die Menge \mathbb{R}_+^2 ist ein Vektorraum mit der oben definierten Addition und Multiplikation mit einem Skalar λ gemäss der ...

- (a) 1. Definition.
- (b) 2. Definition.
- (c) 3. Definition.

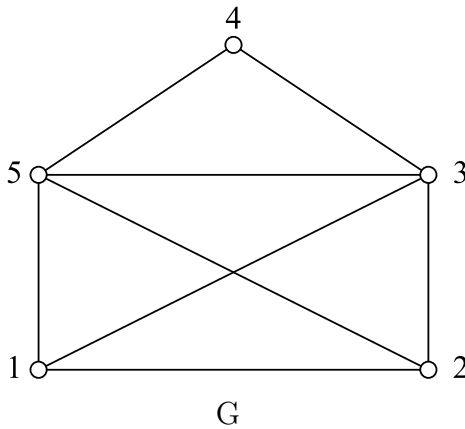
2. Spatprodukt in \mathbb{R}^3

Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ drei Spaltenvektoren. Das *Spatprodukt* $S(a, b, c)$ dieser drei Vektoren a, b, c ist dann definiert als

$$S(a, b, c) := (a \times b) \cdot c.$$

- (a) Beweisen Sie, dass $S(a, b, c) = \det(a, b, c)$ gilt.
- (b) Beweisen Sie, dass $|S(a, b, c)|$ das Volumen des von a, b und c aufgespannten Parallelepipedes (Spat) ist.
- (c) Was sagt das Vorzeichen von $S(a, b, c)$ aus?

3. Wir interpretieren den Graphen G



aus Serie 10, Aufgabe 4 als elektrisches Netzwerk, wobei jede Kante einem Widerstand von $R_0 = 1\Omega$ entspricht. Berechnen Sie den Widerstand R zwischen den Knoten 1 und 5 mit Hilfe der Formel

$$R = R_0 \frac{\tau_{1,5}}{\tau},$$

wobei τ die Anzahl der aufspannenden Bäume von G ist und $\tau_{1,5}$ die Anzahl der aufspannenden Teilbäume, welche die Kante zwischen den Knoten 1 und 5 enthalten. Verwenden Sie dazu die Formel aus Serie 10, Aufgabe 4.

Hinweis: Die Anzahl der aufspannenden Teilbäume, welche die Kante zwischen den Knoten 1 und 5 *nicht* enthalten, ist gleich der Anzahl der aufspannenden Teilbäume des Graphen, den man erhält, wenn man die Kante zwischen den Knoten 1 und 5 löscht.

4. Vandermonde-Determinante

(a) Für die Vandermonde-Determinante gilt die Formel

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Verifizieren Sie diese Formel für den Fall $n = 3$.

(b) Für die Fläche $F_{\Delta(a,b,c)}$ eines ebenen Dreiecks $\Delta(a, b, c)$ mit den Seiten a, b, c gilt bekanntlich die Flächenformel von Heron

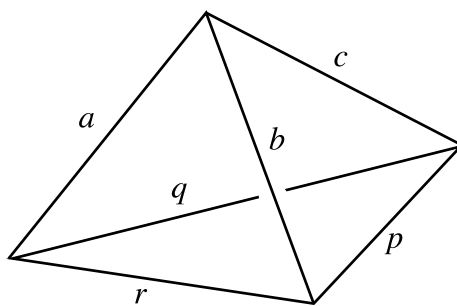
$$F_{\Delta(a,b,c)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

wobei $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ der halbe Umfang des Dreiecks $\Delta(a, b, c)$ ist. Man kann zeigen, dass die Formel

$$F_{\Delta(a,b,c)}^2 = -\frac{1}{16} \det \begin{pmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

denselben Wert für $F_{\Delta(a,b,c)}$ ergibt.

Für das Volumen $V_{\Delta(a,b,c,p,q,r)}$ eines Tetraeders $\Delta(a, b, c, p, q, r)$ mit den Kantenlängen a, b, c, p, q, r



$\Delta(a, b, c, p, q, r)$

gilt eine ähnliche Formel, nämlich

$$V_{\Delta(a,b,c,p,q,r)}^2 = \frac{1}{2^5 3^2} \det \begin{pmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 & 1 \\ a^2 & 0 & r^2 & q^2 & 1 \\ b^2 & r^2 & 0 & p^2 & 1 \\ c^2 & q^2 & p^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welchen Inhalt $V_{\Delta(a,b,c,p,q,r)}$ hat das Tetraeder $\Delta(a,b,c,p,q,r)$ mit den Kantenlängen $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $p = 4$, $q = 3$ und $r = 2$?