

## Lernkontrolle

---

### Aufgabe I

Betrachten Sie eine beliebige  $3 \times 3$  Matrix  $A$  und das lineare Gleichungssystem  $Ax = 0$ . Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Hat  $A$  eine Nullzeile, so besitzt  $Ax = 0$  keine Lösung.

(a) Wahr

✓ (b) Falsch

2. Ist eine Spalte von  $A$  das Vielfache einer anderen Spalte, dann besitzt  $Ax = 0$  genau eine Lösung.

(a) Wahr

✓ (b) Falsch

3. Sind zwei Spalten der Matrix  $A$  gleich, so gilt  $\text{Rang}(A) < 3$ .

✓ (a) Wahr

(b) Falsch

4. Ist eine Zeile von  $A$  das Vielfache einer anderen Zeile, so gilt  $\text{Rang}(A) < 3$ .

✓ (a) Wahr

(b) Falsch

### Aufgabe II

Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem  $Bx = c$ :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & b^2 \\ 0 & b-2 & 3 \\ 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b(b-3) \end{pmatrix}$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

5. Für  $b = 3$  gilt  $\text{Rang}(B) = 3$ .

✓ (a) Wahr

(b) Falsch

6. Für  $b = 2$  gilt  $\text{Rang}(B) = 1$ .

(a) Wahr

✓ (b) Falsch

7. Für  $b = 1$  besitzt  $Bx = c$  unendlich viele Lösungen.

(a) Wahr

✓ (b) Falsch

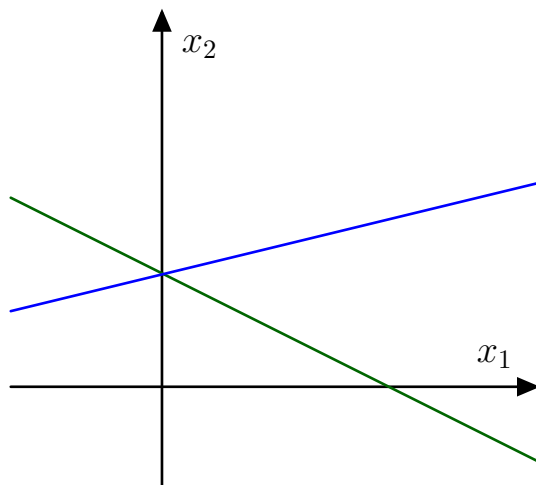
8. Für  $b = 0$  besitzt  $Bx = c$  eine eindeutige Lösung.

✓ (a) Wahr

(b) Falsch

### Aufgabe III

In der folgenden Grafik wird ein lineares Gleichungssystem  $Ax = c$  veranschaulicht, wobei  $A$  eine  $2 \times 2$  Matrix ist.



Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

9. Für die Matrix  $A$  gilt  $\text{Rang}(A) = 2$ .

✓ (a) Wahr

(b) Falsch

10. Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

passt zu der Abbildung von  $Ax = c$  oben.

- (a) Wahr
- ✓ (b) Falsch

11. Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

passt zu der Abbildung von  $Ax = c$  oben.

- ✓ (a) Wahr
- (b) Falsch

12. Das lineare Gleichungssystem

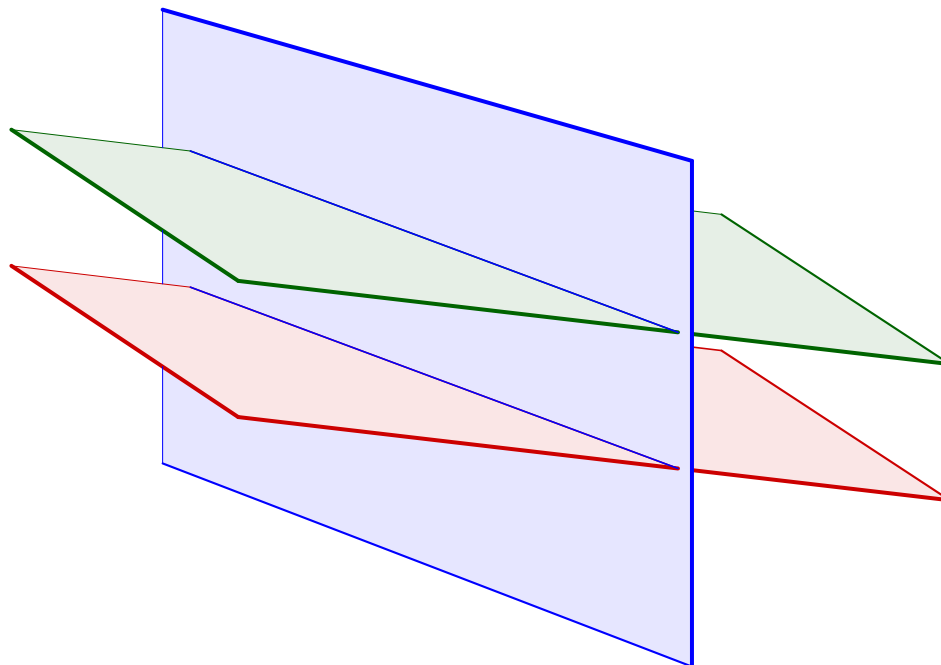
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

passt zu der Abbildung von  $Ax = c$  oben.

- ✓ (a) Wahr  
(b) Falsch

**Aufgabe IV**

In der folgenden Grafik ist ein lineares Gleichungssystem  $Bx = c$  veranschaulicht, wobei  $B$  eine  $3 \times 3$  Matrix ist.



Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

13. Der Vektor  $c$  ist der Nullvektor.

- (a) Wahr  
✓ (b) Falsch

14. Für die Matrix  $B$  gilt  $\text{Rang}(B) = 2$ .

- ✓ (a) Wahr  
(b) Falsch

15. Das lineare Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen.

- (a) Wahr
- ✓ (b) Falsch

16. Die Matrix  $B$  enthält eine Nullzeile.

- (a) Wahr
- ✓ (b) Falsch

**Aufgabe V**

Betrachten Sie beliebige  $n \times n$  Matrizen  $E, F, G$  und  $H$ . Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

17. Es gilt  $(EGF)^3 = E^3G^3F^3$ .

- (a) Wahr
- ✓ (b) Falsch

18. Es gilt  $H(G + F) + 2E = 2E + HF + HG$ .

- ✓ (a) Wahr
- (b) Falsch

19. Es gilt  $(H - G)^2 = H^2 - 2HG + G^2$ .

- (a) Wahr
- ✓ (b) Falsch

**20.** Ist  $F$  eine Diagonalmatrix, so gilt  $GF = FG$ .

- (a) Wahr
- ✓ (b) Falsch

### Aufgabe VI

Es sei  $A$  eine beliebige  $5 \times 5$  Matrix und

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & a & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & a & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

**21.** Für  $a = 2, b = 2$  und  $c = 0$  gilt immer  $AB = BA$ .

- ✓ (a) Wahr
- (b) Falsch

**22.** Für  $a = 3, b = 1$  und  $c = 0$  gilt immer  $AB = BA$ .

- (a) Wahr
- ✓ (b) Falsch

**23.** Für  $a = 0, b = 2$  und  $c = 2$  gilt immer  $AB = BA$ .

- (a) Wahr
- ✓ (b) Falsch

**24.** Für  $a = 0, b = 1$  und  $c = 3$  gilt immer  $AB = BA$ .

- (a) Wahr
- ✓ (b) Falsch

### Aufgabe VII

Betrachten Sie die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

für eine reelle Zahl  $a > 0$ . Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

**25.** Es gilt  $\det(B) \neq 0$ .

- ✓ (a) Wahr
- (b) Falsch

**26.** Die Determinante von  $B$  ist unabhängig vom Wert von  $a$ .

- (a) Wahr
- ✓ (b) Falsch

**27.** Das lineare Gleichungssystem  $Bx = 0$  besitzt genau eine Lösung.

- ✓ (a) Wahr
- (b) Falsch

**28.** Es gilt  $\det(-B) = \det(B)$ .

- (a) Wahr
- ✓ (b) Falsch

### Aufgabe VIII

Betrachten Sie die beiden reellen Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

die  $a \times b \neq 0$  erfüllen, sowie die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

**29.** Für die Determinante von  $M$  gilt  $\det(M) \neq 0$ .

- ✓ (a) Wahr
- (b) Falsch

**30.** Das homogene lineare Gleichungssystem  $Mx = 0$  besitzt genau eine Lösung.

- ✓ (a) Wahr
- (b) Falsch

**31.** Die Fläche des von  $a$  und  $b$  aufgespannten Parallelogramms in der  $x_1x_2$ -Ebene ist ungleich Null.

- ✓ (a) Wahr
- (b) Falsch

**32.** Es existiert eine reelle Zahl  $\lambda$ , so dass  $a = \lambda b$ .

- (a) Wahr
- ✓ (b) Falsch

### Aufgabe IX

Betrachten Sie die folgende Menge von Vektoren im Vektorraum  $\mathbb{R}^3$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

**33.** Der Vektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  kann als Linearkombination von Vektoren aus der Menge  $E$  dargestellt werden.

- ✓ (a) Wahr
- (b) Falsch

**34.** Jeder beliebige Vektor in  $\mathbb{R}^3$  kann als Linearkombination von Vektoren aus der Menge  $E$  dargestellt werden.

- (a) Wahr
- ✓ (b) Falsch

**35.** Die Menge  $E$  ist eine Basis von  $\mathbb{R}^3$ .

- (a) Wahr
- ✓ (b) Falsch



**36.** Die Menge  $E$  enthält eine Basis von  $\mathbb{R}^3$ .

- (a) Wahr
- ✓ (b) Falsch

**Aufgabe X**

Betrachten Sie die folgende Menge von Polynomen im Vektorraum  $\mathcal{P}_3$

$$F = \{t^3, t^2 - t, t^2 - 1, t^3 - t^2 + t\}$$

sowie den von der Menge  $F$  aufgespannten Unterraum  $U$  von  $\mathcal{P}_3$ . Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

**37.** Das Polynom  $2t^3 - t^2 + 2t - 1$  liegt in  $U$ .

- ✓ (a) Wahr
- (b) Falsch

**38.**  $\dim(U) = 2$ .

- (a) Wahr
- ✓ (b) Falsch

**39.**  $F$  ist eine Basis von  $U$ .

- (a) Wahr
- ✓ (b) Falsch

**40.**  $U = \mathcal{P}_3$ .

- (a) Wahr
- ✓ (b) Falsch