Lösung Serie 6

Aufgabe 1 ist online auf https://echo.ethz.ch zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 10. November um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool (link uber https://metaphor.ethz.ch/x/2023/hs/401-0171-00L/).

"Buch" steht im Folgenden für "K. Nipp / D. Stoffer, Lineare Algebra, 5. Auflage".

1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Sei A symmetrisch und regulär. Dann ist auch A^{-1} symmetrisch.

(b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Dann ist A genau für $a = \pm\sqrt{3/2}$ orthogonal.

(c) Es gibt orthogonale Matrizen, die singulär sind.

Lösung: Korrekt sind (a) und (b), denn es gilt:

✓ (a) Sei A symmetrisch und regulär. Dann ist auch A^{-1} symmetrisch.
Richtig, denn

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1},$$

da $A = A^T$ (A ist symmetrisch) und A^{-1} existiert (A ist regulär).
Die allgemein gültige Regel

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

folgt aus der Rechnung

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = \mathbb{I}_n^T = \mathbb{I}_n \Longleftrightarrow (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}\mathbb{I}_n = (A^T)^{-1},$$

wobei der erste Schritt die Formel $(AB)^T = B^TA^T$ aus der Aufgabe 1 der Serie 4 benutzt und $\mathbb{I}_n$ die $n \times n$-Identitätsmatrix ist.

✓ (b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Dann ist A genau für $a = \pm\sqrt{3/2}$ orthogonal.

Richtig, denn $A^T A = \mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *gilt genau für diese beiden Werte* $a = \pm\sqrt{3/2}$.

Nachrechnen liefert:

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a^2}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} & \frac{a}{2\sqrt{2}} - \frac{a}{4\sqrt{2}} - \frac{a}{4\sqrt{2}} & 0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ \frac{a}{2\sqrt{2}} - \frac{a}{4\sqrt{2}} - \frac{a}{4\sqrt{2}} & \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} & 0 + \frac{a}{2\sqrt{2}} - \frac{a}{2\sqrt{2}} \\ 0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} & 0 + \frac{a}{2\sqrt{2}} - \frac{a}{2\sqrt{2}} & 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a^2}{2} + \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{2} + \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{genau dann, wenn } \frac{a^2}{2} + \frac{1}{4} = 1. \end{aligned}$$

Tipp: *Die Matrix* $A^T A$ *muss nach Aufgabe 1 der Serie 4 symmetrisch sein und man sollte daher beim Ausrechnen nicht unnötig arbeiten, da die drei nicht diagonalen Einträge jeweils doppelt auftreten (Symmetrie).*
Damit A *orthogonal ist (was per Definition bedeutet, dass* $A^T A = \mathbb{I}_3$ *gilt), muss daher gelten*

$$\frac{a^2}{2} + \frac{1}{4} = 1 \iff 2a^2 + 1 = 4 \iff 2a^2 = 3 \iff a^2 = \frac{3}{2} \iff a = \sqrt{\frac{3}{2}} \ \textit{ oder } \ a = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

und dies sind genau die gegebenen Werte $a = \pm\sqrt{3/2}$ *als Lösungen.*

(c) Es gibt orthogonale Matrizen, die singulär sind.
Falsch, eine orthogonale Matrix A *besitzt immer die Inverse* A^T, *da per Definition* $A^T A = \mathbb{I}_n$ *gilt und für quadratische Matrizen aus* $XA = \mathbb{I}_n$ *immer* $X = A^{-1}$ *folgt.*

2. *Reguläre und Singuläre* 3×3*-Matrizen*

(a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A regulär ist.

(b) Für welche Werte des Parameters γ ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & \gamma & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & \gamma \end{pmatrix}$$

singulär?

Lösung:

(a) Nach Satz 2.8 aus dem Buch ("K. Nipp / D. Stoffer, Lineare Algebra, 5. Auflage") gilt für jede $n \times n$-Matrix A:

$$A \text{ ist regulär} \iff \text{das Gleichungssystem } Ax = 0 \text{ hat nur die triviale Lösung } x = 0.$$

Also reicht es die Lösungsmenge von $Ax = 0$ zu betrachten. Wir verwenden dafür den Gauss-Algorithmus:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow{1.Z \leftrightarrow 3.Z} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{array} \xrightarrow[3.Z=3.Z-3\times(1.Z)]{2.Z=2.Z-2\times(1.Z)} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\xrightarrow{3.Z=3.Z+2\times(2.Z)} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \quad (*)$$

Die einzige Lösung hier ist $x = 0$, da aus $(*)$ folgt, dass

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \\ -2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies x_3 = 0 \text{ (aus der 3. Zeile)}$$

$$\implies x_2 = 0 \text{ (aus der 2. Zeile mit } x_3 = 0\text{)}$$

$$\implies x_1 = 0 \text{ (aus der 1. Zeile mit } x_2 = 0,\ x_3 = 0\text{)}.$$

Deshalb ist A regulär.

(b) Aus Satz 2.8 aus dem Buch ("K. Nipp / D. Stoffer, Lineare Algebra, 5. Auflage") folgt auch für jede $n \times n$-Matrix B:

$$B \text{ ist singulär} \iff \text{das Gleichungssystem } Bx = 0 \text{ hat nichttriviale Lösungen.}$$

Deshalb betrachten wir die Lösungsmenge von $Bx = 0$:

$$\begin{array}{rrr|l} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 2 & \gamma & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & \gamma & 0 \end{array} \xrightarrow{1.Z \leftrightarrow 2.Z} \begin{array}{rrr|l} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & \gamma & 4 & 0 \\ -1 & -1 & \gamma & 0 \end{array} \xrightarrow[3.Z=3.Z+1.Z]{2.Z=2.Z-2\times(1.Z)} \begin{array}{ccc|l} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & \gamma-4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma+2 & 0 \end{array}$$

$$\xrightarrow{2.Z \leftrightarrow 3.Z} \begin{array}{ccc|l} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma+2 & 0 \\ 0 & \gamma-4 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{3.Z=3.Z-(\gamma-4)\times(2.Z)} \begin{array}{ccc|l} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma+2 & 0 \\ 0 & 0 & -(\gamma-4)(\gamma+2) & 0 \end{array}$$

$$= \begin{array}{ccc|l} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma+2 & 0 \\ 0 & 0 & (4-\gamma)(\gamma+2) & 0 \end{array} \quad (*)$$

Falls $(4-\gamma)(\gamma+2) = 0$ ist, ist $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$ ein freier Parameter, da dann wegen $(*)$ gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \gamma+2 \\ 0 & 0 & (4-\gamma)(\gamma+2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_2 + (\gamma+2)x_3 \\ (4-\gamma)(\gamma+2)x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$ und es gilt nur, wenn $(4-\gamma)(\gamma+2) = 0$ nicht zwingend $x_3 = 0$ (aus der 3. Zeile)
$\Longrightarrow x_2 = -(\gamma+2)x_3$ und ist eindeutig durch x_3 bestimmt (aus der 2. Zeile)
$\Longrightarrow x_1 = -2x_3 - 2x_2$ und ist ebenfalls eindeutig durch x_3 bestimmt (aus der 1. Zeile)

und $Bx = 0$ besitzt daher nichttriviale Lösungen $x \neq 0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.
Somit ist B singulär für die Werte $\gamma \in \{-2, 4\}$, weil genau für diese beiden Werte von γ gilt $(4-\gamma)(\gamma+2) = 0$.

3. *Orthogonale* 2×2-*Matrizen*
Sei $\mathbb{I}_2$ die 2×2-Einheitsmatrix und $u = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})^T$.

(a) Für welche Werte des Parameters α ist die Matrix

$$V := \mathbb{I}_2 - \alpha u u^T$$

orthogonal?

(b) Lösen Sie für die in (a) ermittelten Werte von α das Gleichungssystem

$$V \cdot x = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ohne den Gauss-Algorithmus zu benutzen.

(c) Kontrollieren Sie (a) und (b) mit MATLAB.

Lösung:

(a) Es sei

$$V := \mathbb{I}_2 - \alpha u u^T.$$

Wir können die gesuchten Werte von α wie folgt finden:
V ist per Definition orthogonal, falls $V^T V = \mathbb{I}_2$ mit $\mathbb{I}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Da $\mathbb{I}_2^T = \mathbb{I}_2$ und $(uu^T)^T = (u^T)^T u^T = uu^T$, folgt

$$\begin{aligned}
V^T &= (\mathbb{I}_2 - \alpha u u^T)^T \\
&= \mathbb{I}_2^T - (\alpha u u^T)^T \\
&= \mathbb{I}_2^T - (u u^T)^T \alpha^T \\
&= \mathbb{I}_2 - \alpha (u u^T)^T \\
&= \mathbb{I}_2 - \alpha (u^T)^T u^T \\
&= \mathbb{I}_2 - \alpha u u^T \\
&= V
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
V^T V &= V V \\
&= (\mathbb{I}_2 - \alpha u u^T) \cdot (\mathbb{I}_2 - \alpha u u^T) \\
&= \mathbb{I}_2 \cdot \mathbb{I}_2 - \mathbb{I}_2 \alpha u u^T - \alpha u u^T \mathbb{I}_2 + (-\alpha u u^T) \cdot (-\alpha u u^T) \\
&= \mathbb{I}_2 \cdot \mathbb{I}_2 - \mathbb{I}_2 \alpha u u^T - \mathbb{I}_2 \alpha u u^T + \alpha u u^T \alpha u u^T \\
&= \mathbb{I}_2 \cdot \mathbb{I}_2 - 2\mathbb{I}_2 \alpha u u^T + \alpha u u^T \alpha u u^T \\
&= \mathbb{I}_2 - 2\alpha u u^T + \alpha^2 u \underbrace{u^T u}_{=1} u^T \\
&= \mathbb{I}_2 - 2\alpha u u^T + \alpha^2 u u^T \\
&= \mathbb{I}_2 + (\alpha^2 - 2\alpha) u u^T.
\end{aligned}$$

In der obigen Rechnung haben wir auch verwendet, dass $u^T u = 1$ gilt, was aus der Berechnung

$$\begin{aligned}
u^T u &= ((\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2})^T)^T \cdot (\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2})^T \\
&= (\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \\
&= \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4} \\
&= 1 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

folgt.
Bemerkung:
Der Term uu^T ist die 2×2-Matrix

$$\begin{aligned}
uu^T &= (\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2})^T \cdot ((\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2})^T)^T \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot (\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},
\end{aligned}$$

aber $u^T u = 1 \in \mathbb{R}$ ist eine reelle Zahl ($= 1 \times 1$-Matrix).

Da $uu^T \neq 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, gilt $V^T V = \mathbb{I}_2$ ($\Longleftrightarrow V$ ist orthogonal) genau dann, wenn

$$V^T V = \mathbb{I}_2 + (\alpha^2 - 2\alpha) uu^T = \mathbb{I}_2 \Longleftrightarrow (\alpha^2 - 2\alpha) uu^T = 0,$$

also genau dann, wenn $\alpha^2 - 2\alpha = 0 \Longleftrightarrow \alpha(\alpha - 2) = 0$, also genau für $\alpha = 0$ und $\alpha = 2$.
Bemerkung:
Für $\alpha = 0$ ist $V = \mathbb{I}_2 - 0 \cdot uu^T = \mathbb{I}_2$ trivialerweise orthogonal, da

$$V^T V = \mathbb{I}_2^T \mathbb{I}_2 = \mathbb{I}_2 \mathbb{I}_2 = \mathbb{I}_2.$$

Allgemeiner ist eine $n \times n$-Matrix $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ von der Form $V := \mathbb{I}_n - 2uu^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $u^T u = 1$ und der $n \times n$-Identitätsmatrix $\mathbb{I}_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ immer orthogonal, da

$$\begin{aligned}
V^T V &= (\mathbb{I}_n - 2uu^T)^T \cdot (\mathbb{I}_n - 2uu^T) \\
&= (\mathbb{I}_n^T - (u^T)^T u^T 2^T) \cdot (\mathbb{I}_n - 2uu^T) \\
&= (\mathbb{I}_n - 2uu^T) \cdot (\mathbb{I}_n - 2uu^T) \\
&= \mathbb{I}_n \cdot \mathbb{I}_n - \mathbb{I}_n 2uu^T - 2uu^T \mathbb{I}_n + (-2uu^T) \cdot (-2uu^T) \\
&= \mathbb{I}_n - 2uu^T - 2uu^T + 4uu^T uu^T
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{I}_n - 4uu^T + 4u\underbrace{u^T u}_{=1} u^T \\
&= \mathbb{I}_n - 4uu^T + 4uu^T \\
&= \mathbb{I}_n.
\end{aligned}
$$

Man nennt eine solche Matrix *Householder-Matrix*. Siehe dazu Seite 32 im Buch ("K. Nipp / D. Stoffer, Lineare Algebra, 5. Auflage").

Bemerkung:
Die folgende Rechnung

$$
\begin{aligned}
V^T &= (\mathbb{I}_n - 2uu^T)^T \\
&= \mathbb{I}_n^T - (2uu^T)^T \\
&= \mathbb{I}_n^T - (u^T)^T u^T 2^T \\
&= \mathbb{I}_n - 2uu^T \\
&= V
\end{aligned}
$$

zeigt zudem, dass für eine *Householder-Matrix* V immer $V^T = V$ gilt.

(b) Wenn die Inverse V^{-1} existiert, gilt

$$
V \cdot x = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow x = V^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

<u>**1. Für $\alpha = 0$:**</u>
Hier gilt, wie oben beschrieben

$$
V = \mathbb{I}_2 - 0 \cdot uu^T = \mathbb{I}_2
$$

und wir berechnen

$$
V \cdot x = \mathbb{I}_2 \cdot x = x = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow x = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

<u>**2. Für $\alpha = 2$:**</u>
Hier gilt

$$
\begin{aligned}
V &= \mathbb{I}_2 - 2 \cdot uu^T \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Da V orthogonal ($V^T V = \mathbb{I}_2$) und symmetrisch ($V^T = V$) ist, gilt

$$V^T V = VV = V^2 = \mathbb{I}_2 \iff V = V^{-1}$$

und damit gilt

$$V^{-1} = V^T = V.$$

Die Inverse V^{-1} einer orthogonalen Matrix V existiert also immer und ist im Allgemeinen gegeben durch $V^{-1} = V^T$.
Also berechnen wir mit der obigen Äquivalenz $V \cdot x = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \iff x = V^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ und $V^{-1} = V$, dass

$$x = V^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = V \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\iff x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir haben das folgende MATLAB-Skript:

```
%a)
u = [sqrt(3)/2;1/2];
A = eye(2)-2*(u*u.');

%Bestimmt die Matrix V fuer alpha = 2. eye(2) bezeichnet die Einheitsmatrix
%der Dimension 2x2.

B=eye(2);

%B ist die Matrix V fuer den Parameter alpha = 0.

A'*A

%Prueft, ob A orthogonal ist. ' transponiert eine Matrix. Sie ist genau dann
%orthogonal, wenn A'*A = eye(2) gilt, und das wird auch
%von der Ausgabe angezeigt. Bemerke aber, dass die logische Aussage
%A'*A = eye(2) falsch ist; dies liegt nur an winzigen Rundungsfehlern.
B'*B

%Auch dies ergibt - trivialerweise - die Identitaet, also sind beide
%Matrizen orthogonal.

%b)
xA = [0;2];
xB = [-sqrt(3);1];

%Initialisiert die Variablen fuer die berechneten Loesungen x.

A*xA
B*xB

%Bestimmt in den jeweiligen Faellen das Produkt der Matrix V mit dem Vektor
%x. Die Ausgabe zeigt jeweils den Vektor [-sqrt(3);1], was verifiziert,
%dass die Loesungen in der Tat korrekt sind.
```

4. Gegeben sei die 2×2-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von a, b, c, d ist A regulär?

(b) Bestimmen Sie für die in (a) ermittelten Werte von a, b, c, d die Inverse A^{-1}.

Lösung:

(a) Nach Satz 2.8 aus dem Buch ("K. Nipp / D. Stoffer, Lineare Algebra, 5. Auflage") gilt für jede $n \times n$-Matrix A:

$$A \text{ ist regulär} \iff \text{das Gleichungssystem } Ax = 0 \text{ hat nur die triviale Lösung } x = 0.$$

Also reicht es, die Lösungsmenge von $Ax = 0$ zu betrachten. Wir verwenden den Gauss-Algorithmus:

1. Fall: $a \neq 0$: Es gilt

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & 1 \\ \hline a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{array} \xrightarrow{2.Z = 2.Z - \frac{c}{a} \times (1.Z)} \begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & 1 \\ \hline a & b & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} & 0 \end{array} \quad (*)$$

Dieses System $(*)$ hat Rang 1 genau dann, wenn $d - \frac{bc}{a} = 0 \Leftrightarrow ad - bc = 0$ gilt. Folglich ist die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ regulär genau dann, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt.

2. Fall: $a = 0$: Es gilt

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & 1 \\ \hline 0 & b & 0 \\ c & d & 0 \end{array} \xrightarrow{1.Z \leftrightarrow 2.Z} \begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & 1 \\ \hline c & d & 0 \\ 0 & b & 0 \end{array}$$

Dieses System hat Rang < 2 genau dann, wenn entweder $b = 0$ oder $c = 0$ ist, also wenn $bc = 0 \Leftrightarrow ad - bc = 0$ gilt, da $a = 0$ ist. Folglich ist die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ auch in diesem Fall regulär genau dann, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt.

Zusammenfassend gilt daher:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ist regulär} \iff ad - bc \neq 0.$$

(b) Sei A regulär, also $ad - bc \neq 0$. Wir setzen

$$X := A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

und benutzen die Notationen

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix},\ x^{(2)} = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix},\ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit diesen Definitionen gilt nun

$$X := A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt aus der Gleichung

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_2 = AA^{-1} = AX = A \cdot \begin{pmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax^{(1)} & Ax^{(2)} \end{pmatrix},$$

dass $Ax^{(1)} = e_1$ und $Ax^{(2)} = e_2$ gelten muss. Insofern entspricht $AX = \mathbb{I}_2$ einem Gleichungssystem $Ax = e_i$ mit Lösungen $x = x^{(i)}$ für $i = 1, 2$ mit zwei rechten Seiten. Wir lösen es mit dem daraus resultierenden Gauss-Jordan-Algorithmus:
Betrachte die erweiterte Matrix

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)$$

<u>**1. Fall** $a \neq 0$**:**</u> Wir berechnen

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2.Z=2.Z-\frac{c}{a}\times(1.Z)} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & d-\frac{bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{2.Z=a\times(2.Z)} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right) \xrightarrow{1.Z=1.Z-\frac{b}{ad-bc}\times(2.Z)} \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1+\frac{bc}{ad-bc} & -\frac{ab}{ad-bc} \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right)$$
$$= \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{ad-bc+bc}{ad-bc} & -\frac{ab}{ad-bc} \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{ad}{ad-bc} & -\frac{ab}{ad-bc} \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{1.Z=\frac{ad-bc}{a}\times(1.Z)} \left(\begin{array}{cc|cc} ad-bc & 0 & d & -b \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right) \xrightarrow[2.Z=\frac{1}{ad-bc}\times(2.Z)]{1.Z=\frac{1}{ad-bc}\times(1.Z)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right).$$

Daraus folgt:

$$A^{-1} = X = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

<u>**2. Fall:** $a = 0$**:**</u> Da $ad - bc \neq 0$ gilt und $a = 0$ ist, gilt $bc \neq 0$ und somit ist $b \neq 0$ und $c \neq 0$. Es folgt ähnlich wie oben

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1.Z\leftrightarrow 2.Z} \left(\begin{array}{cc|cc} c & d & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{1.Z=1.Z-\frac{d}{b}\times(2.Z)} \left(\begin{array}{cc|cc} c & 0 & -\frac{d}{b} & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[2.Z=\frac{1}{b}\times(2.Z)]{1.Z=\frac{1}{c}\times(1.Z)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{d}{bc} & \frac{1}{c} \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{-bc} & \frac{-b}{-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{-bc} & \frac{0}{ad-bc} \end{array}\right) \overset{a=0}{\underset{\Longrightarrow ad=0}{\equiv}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right).$$

Also gilt auch für $a = 0$:

$$A^{-1} = X = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Zusammenfassend gilt daher:
Die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist singulär (nicht invertierbar), wenn $ad - bc = 0$ gilt.
Ansonsten ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } a, b, c, d \text{ mit } ad - bc \neq 0.$$