

# Lösung Serie 9

Aufgabe 1 ist online auf <https://echo.ethz.ch> zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 1. Dezember um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool (link über <https://metaphor.ethz.ch/x/2023/hs/401-0171-00L/>).

1. Für welche Werte  $x \in \mathbb{R}$  ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = 1?$$

- (a) Für jedes  $x \in \mathbb{R}$ .
- (b) Für kein  $x \in \mathbb{R}$ .
- (c) Für  $x = 0$ .
- (d) Für  $x = 2$ .
- (e) Für  $x = 4$ .

**Lösung:** Korrekt sind (c) und (d), da:

- (a) Für jedes  $x \in \mathbb{R}$ .
- (b) Für kein  $x \in \mathbb{R}$ .
- ✓ (c) Für  $x = 0$ .
- ✓ (d) Für  $x = 2$ .
- (e) Für  $x = 4$ .

Man berechnet mit der rekursiven Definition der Determinante, dass

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot (x^2 - 1) + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot (x - 1) + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot (1 - x) \\ &= (x^2 - 1) - (x - 1) + (1 - x) \\ &= x^2 - 1 - x + 1 + 1 - x \\ &= x^2 - 2x + 1. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die obige Determinante nach der ersten Zeile entwickelt.  
 Das Polynom  $x^2 - 2x + 1$  ist nur für  $x = x_1 = 0$  oder  $x = x_2 = 2$  gleich 1, da

$$x^2 - 2x + 1 = 1 \iff x^2 - 2x = 0 \iff x(x - 2) = 0 \iff x = x_1 = 0 \text{ oder } x = x_2 = 2.$$

2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 0.4 & 1 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von  $A$ , d.h. eine Linksdreiecksmatrix  $L$ , eine Rechtsdreiecksmatrix  $R$  und eine Permutationsmatrix  $P$ , für welche  $PA = LR$  gilt.
- (b) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme  $Ax = b_i$ ,  $i = 1, 2$ , mit Hilfe von (a) für

$$b_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 3.75 \\ 1.75 \\ 4.5 \end{pmatrix}.$$

- (c) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von  $A$  mit MATLAB.
- (d) Lösen Sie die beiden linearen Gleichungssysteme aus (b) mit MATLAB.

**Lösung:** Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 0.4 & 1 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & \frac{2}{5} & 1 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

mit

$$b_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 3.75 \\ 1.75 \\ 4.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Wir berechnen

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} - \\ \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{2}{5} & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 6 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{l} 2.Z - \frac{2}{5} \times (1.Z) \\ \xrightarrow{\hspace{1cm}} \\ 3.Z + \frac{4}{5} \times (1.Z) \end{array} & \begin{array}{c} - \\ \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{38}{5} \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{c} 2.Z \leftrightarrow 3.Z \\ \xrightarrow{\hspace{1cm}} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{array} & \begin{array}{c} - \\ \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{38}{5} \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{l} 3.Z + 0 \times (2.Z) \\ \xrightarrow{\hspace{1cm}} \\ \mathbf{0} \end{array} & \begin{array}{c} - \\ \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{38}{5} \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ \hline \end{array} & (*) .
 \end{array}$$

Daraus folgt, dass

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{aus den fettgedruckten Manipulationen mit Einsen auf der Diagonalen}),$$

und

$$R = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{38}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad (\text{aus der rechten Seite von } (*)),$$

mit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{aus der linken Seite von } (*)).$$

(b) Ähnlich wie in Serie 7, Aufgabe 2(b) gilt für  $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} Ax = b_i &\iff PA = Pb_i \implies PAx = LRx = L(Rx) = Pb_i \\ &\iff x = R^{-1}(L^{-1}Pb_i) = R^{-1} \underbrace{(L^{-1}Pb_i)}_{\substack{=\text{Lösung } y \text{ von } Ly = Pb_i \\ =\text{Lösung } x \text{ von } Rx = L^{-1}Pb_i = y}}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich wiederum das folgende immer gleiche Lösungsverfahren mit zwei Schritten (i) und (ii):

(1) Es sei  $b_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

(i) Zuerst lösen wir die lineare Gleichung  $Lc = Pb_1$ :

In Matrixschreibweise

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}}_{=c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ -\frac{4}{5}c_1 + c_2 \\ \frac{2}{5}c_1 + c_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=P} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}}_{=b_1} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass

$$c_1 = 7 \quad (1. \text{ Zeile}),$$

$$-\frac{4}{5}c_1 + c_2 = -2 \implies c_2 = -2 + \frac{4}{5}c_1 = -2 + \frac{4}{5} \cdot 7 = -\frac{10}{5} + \frac{28}{5} = \frac{18}{5} \implies c_2 = \frac{18}{5} \quad (2. \text{ Zeile}),$$

$$\frac{2}{5}c_1 + c_3 = 3 \implies c_3 = 3 - \frac{2}{5}c_1 = 3 - \frac{2}{5} \cdot 7 = \frac{15}{5} - \frac{14}{5} = \frac{1}{5} \implies c_3 = \frac{1}{5} \quad (3. \text{ Zeile}).$$

Wir erhalten daher

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ \frac{18}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3.6 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

- (ii) Nun lösen wir die lineare Gleichung  $Rx = c$ :  
In Matrixschreibweise

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{38}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}}_{=R} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{=x} = \begin{pmatrix} 5x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \frac{4}{5}x_2 + \frac{38}{5}x_3 \\ \frac{1}{5}x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ \frac{18}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}}_{=c}.$$

Daraus folgt, dass

$$\frac{1}{5}x_3 = \frac{1}{5} \implies x_3 = 1 \quad (3. \text{ Zeile}),$$

$$\frac{4}{5}x_2 + \frac{38}{5}x_3 = \frac{18}{5} \quad (2. \text{ Zeile})$$

$$\implies x_2 = \frac{5}{4} \left( \frac{18}{5} - \frac{38}{5}x_3 \right) = \frac{5}{4} \left( \frac{18}{5} - \frac{38}{5} \right) = \frac{5}{4} \cdot \underbrace{\left( -\frac{20}{5} \right)}_{=-4} = -5 \implies x_2 = -5,$$

$$5x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \quad (1. \text{ Zeile})$$

$$\implies x_1 = \frac{1}{5} (7 - 2x_3 - x_2) = \frac{1}{5} (7 - 2 \cdot 1 - (-5)) = \frac{1}{5} (7 - 2 + 5) = \frac{10}{5} = 2$$

$$\implies x_1 = 2.$$

Wir erhalten deshalb schlussendlich für die Lösung  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  der linearen Gleichung  $Ax = b_1$ , den Vektor

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Es sei nun  $b_2 = \begin{pmatrix} 3.75 \\ 1.75 \\ 4.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$ .

- (i) Zuerst lösen wir wieder die lineare Gleichung  $Lc = Pb_2$ :  
In Matrixschreibweise

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}}_{=c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ -\frac{4}{5}c_1 + c_2 \\ \frac{2}{5}c_1 + c_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=P} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{15}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}}_{=b_2} = \begin{pmatrix} \frac{15}{4} \\ \frac{4}{9} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass

$$c_1 = \frac{15}{4} \quad (1. \text{ Zeile}),$$

$$-\frac{4}{5}c_1 + c_2 = \frac{9}{2} \implies c_2 = \frac{9}{2} + \frac{4}{5}c_1 = \frac{9}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{4} = \frac{9}{2} + 3 = \frac{9}{2} + \frac{6}{2} = \frac{15}{2} \implies c_2 = \frac{15}{2} \quad (2. \text{ Zeile}),$$

$$\frac{2}{5}c_1 + c_3 = \frac{7}{4} \implies c_3 = \frac{7}{4} - \frac{2}{5} \cdot \frac{15}{4} = \frac{7}{4} - \frac{3}{2} = \frac{7}{4} - \frac{6}{4} = \frac{1}{4} \implies c_3 = \frac{1}{4} \quad (3. \text{ Zeile}).$$

Wir erhalten daher

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{4} \\ \frac{15}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.75 \\ 7.5 \\ 0.25 \end{pmatrix}.$$

- (ii) Danach lösen wir wiederum die lineare Gleichung  $Rx = c$ :  
In Matrixschreibweise

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{38}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}}_{=R} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{=x} = \begin{pmatrix} 5x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \frac{4}{5}x_2 + \frac{38}{5}x_3 \\ \frac{1}{5}x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{15}{4} \\ \frac{15}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}}_{=c}.$$

Daraus folgt, dass

$$\frac{1}{5}x_3 = \frac{1}{4} \implies x_3 = \frac{5}{4} \quad (3. \text{ Zeile}),$$

$$\frac{4}{5}x_2 + \frac{38}{5}x_3 = \frac{15}{2} \quad (2. \text{ Zeile})$$

$$\implies x_2 = \frac{5}{4} \left( \frac{15}{2} - \frac{38}{5}x_3 \right) = \frac{5}{4} \left( \frac{15}{2} - \frac{38}{5} \cdot \frac{5}{4} \right) = \frac{5}{4} \left( \frac{15}{2} - \frac{19}{2} \right) = \frac{5}{4} \cdot \left( -\frac{4}{2} \right) = -\frac{5}{2}$$

$$\implies x_2 = -\frac{5}{2},$$

$$5x_1 + x_2 + 2x_3 = \frac{15}{4} \quad (1. \text{ Zeile})$$

$$\implies x_1 = \frac{1}{5} \left( \frac{15}{4} - 2x_3 - x_2 \right) = \frac{1}{5} \left( \frac{15}{4} - 2 \cdot \frac{5}{4} - \left( -\frac{5}{2} \right) \right) = \frac{1}{5} \left( \frac{15}{4} - \frac{10}{4} + \frac{5}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{5} \left( \frac{15}{4} - \frac{10}{4} + \frac{10}{4} \right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{15}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\implies x_1 = \frac{3}{4}.$$

Wir erhalten deshalb schlussendlich für die Lösung  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  der linearen Gleichung  $Ax = b_2$ , den Vektor

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ -2.5 \\ 1.25 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir haben das folgende MATLAB-Skript:

```
A=[5 1 2; 2 0.4 1; -4 0 6];  
[L,R,P]=lu(A)
```

(d) Wir haben das folgende MATLAB-Skript:

```
A=[5 1 2; 2 0.4 1; -4 0 6];  
b1=[7 3 -2]';  
b2=[3.75 1.75 4.5]';  
[L,R,P]=lu(A);  
c1=L\u(P*b1);  
x1=R\u(c1);  
c2=L\u(P*b2);  
x2=R\u(c2)
```

3. Berechnen Sie die Determinanten der zwei Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Lösung:** Es ist

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{1.Z \leftrightarrow 3.Z}{=} (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\substack{2.Z - 3 \times (1.Z) \\ 3.Z - 2 \times (1.Z)}}{=} (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{3.Z - 2 \cdot Z}{=} (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 4 = 4. \end{aligned}$$

Dabei haben wir zuerst die erste Zeile und die dritte Zeile vertauscht (daher kommt das negative Vorzeichen) und danach auf die so entstandene Matrix den Gauss-Algorithmus angewandt, was die Determinante unverändert lässt. Auch haben wir verwendet, dass die

Determinante einer Dreiecksmatrix gleich dem Produkt ihrer Diagonaleinträge ist, also

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * & * \\ 0 & 0 & a_{33} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & a_{33} & 0 & 0 \\ * & * & * & \ddots & 0 \\ * & * & * & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Alternativ kann man auch (zum Beispiel) nach der 1. Zeile entwickeln und erhält

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot (4 - 1) - 1 \cdot (6 - 1) + 3 \cdot (3 - 2) = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 6 - 5 + 3 = 4. \end{aligned}$$

Es ist

$$\det(N) = 0,$$

da die zweite Zeile die Summe der ersten Zeile und der dritten Zeile ist, weil

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

In so einem Fall, wo Zeilen oder Spalten einer Matrix  $A$  linear abhängig sind, gilt immer  $\det(A) = 0$  und die Matrix  $A$  ist somit nicht invertierbar.

Alternativ kann man auch (zum Beispiel) nach der 3. Spalte entwickeln, da diese am meisten Nullen hat, und erhält

$$\begin{aligned} \det(N) &= \det \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=2} + (-1)^{2+3} \cdot (-1) \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=2} + (-1)^{3+3} \cdot 0 + (-1)^{4+3} \cdot 0 \\ &= (-1) \cdot 2 - (-1) \cdot 2 + 0 + 0 \\ &= -2 - (-2) \\ &= -2 + 2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

In der obigen Rechnung haben wir benutzt, dass

$$\begin{aligned}
 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} &= (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 0 \\
 &= (-1)^2 \cdot 2 \cdot ((-2) \cdot 2 - 2 \cdot 1) + (-1)^3 \cdot 1 \cdot ((-2) \cdot 2 - 2 \cdot 5) + 0 \\
 &= 2 \cdot (-4 - 2) - 1 \cdot (-4 - 10) \\
 &= 2 \cdot (-6) - (-14) \\
 &= -12 + 14 \\
 &= 2,
 \end{aligned}$$

wobei wir (zum Beispiel) nach der 1. Zeile entwickelt haben, da diese eine Null beinhaltet und auch sonst die "kleinsten" Zahlen hat. Ebenfalls nutzten wir, dass

$$\begin{aligned}
 \det \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} &= (-1)^{1+1} \cdot 4 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \\
 &\quad + (-1)^{1+3} \cdot (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= (-1)^2 \cdot 4 \cdot ((-2) \cdot 2 - 2 \cdot 1) + (-1)^3 \cdot 3 \cdot ((-2) \cdot 2 - 2 \cdot 5) \\
 &\quad + (-1)^4 \cdot (-2) \cdot ((-2) \cdot 1 - (-2) \cdot 5) \\
 &= 4 \cdot (-4 - 2) - 3 \cdot (-4 - 10) + (-2) \cdot (-2 - (-10)) \\
 &= 4 \cdot (-6) - 3 \cdot (-14) + (-2) \cdot (-2 + 10) \\
 &= -24 + 42 + (-2) \cdot 8 \\
 &= -24 + 42 - 16 \\
 &= 2,
 \end{aligned}$$

wobei wir hier (zum Beispiel) nach der 1. Zeile entwickelt haben.

4. Betrachten Sie die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie mit MATLAB die Determinante  $\det(M)$  von  $M$ .
- (b) Geben Sie allgemein an, welche Werte für die Determinante einer orthogonalen Matrix überhaupt in Frage kommen. Begründen Sie Ihre Antwort.

**Lösung:**



- (a) Von Hand berechnen wir (zum Beispiel) mittels einer Entwicklung nach der 1. Zeile, da diese eine Null beinhaltet, dass

$$\begin{aligned}
 \det(M) &= \det \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
 &= (-1)^{1+1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 0 \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left( -\frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left( -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{4} - \left( -\frac{1}{4} \right) \right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \\
 &= -\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
 &= -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \\
 &= -1.
 \end{aligned}$$

Mit MATLAB berechnen wir  $\det(M) = -1$  mit dem folgenden Skript:

```

M=[sqrt(3)/2 1/2 0;
  -1/(2*sqrt(2)) sqrt(3)/(2*sqrt(2)) 1/sqrt(2);
  -1/(2*sqrt(2)) sqrt(3)/(2*sqrt(2)) -1/sqrt(2)]
det(M)

```

- (b) Allgemein gilt: Eine  $n \times n$ -Matrix  $M$  ist orthogonal, falls

$$M^T M = \mathbb{I}_n.$$

Aus

$$\det(M^T M) = \det(M^T) \cdot \det(M) = \det(M) \cdot \det(M) = (\det(M))^2,$$

wobei wir die allgemein gültige Regel  $\det(M^T) = \det(M)$  verwendet haben, folgt für  $M$  orthogonal:

$$(\det(M))^2 = \det(M^T M) = \det(\mathbb{I}_n) = 1.$$

Und daraus folgt wiederum

$$(\det(M))^2 = 1 \implies \det(M) = \pm 1.$$

Somit kann für eine orthogonale Matrix  $M$  nur gelten:  $\det(M) = 1$  oder  $\det(M) = -1$ . Beides kommt tatsächlich auch vor, da zum Beispiel

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{I}_n) &= 1 \quad \text{mit } M := \mathbb{I}_n \text{ orthogonal, da } \mathbb{I}_n^T \cdot \mathbb{I}_n = \mathbb{I}_n \cdot \mathbb{I}_n = \mathbb{I}_n, \\ \det(-\mathbb{I}_n) &= -1 \quad \text{mit } M := -\mathbb{I}_n \text{ orthogonal, da } (-\mathbb{I}_n)^T \cdot (-\mathbb{I}_n) = (-\mathbb{I}_n) \cdot (-\mathbb{I}_n) \\ &= (-1) \cdot (-1) \cdot \mathbb{I}_n \cdot \mathbb{I}_n = \mathbb{I}_n. \end{aligned}$$

**5.** (Ohne Abgabe) *Illustration zu Drehungen im  $\mathbb{R}^2$*

Downloaden und entpacken Sie das zip-Archiv

<https://metaphor.ethz.ch/x/2018/hs/401-0171-00L/sc/LinAlgSerie9Aufgabe5.zip>

und führen Sie das Skript `rotateeth` aus. Sobald die erste Figur erscheint, kann durch dreimaliges betätigen einer beliebigen Taste das ganze Skript ausgeführt werden. Schauen Sie sich den Code an, um zu verstehen, was geschieht.

**Lösung:** Wird vom zip-Archiv Skript `rotateeth` auf

<https://metaphor.ethz.ch/x/2018/hs/401-0171-00L/sc/LinAlgSerie9Aufgabe5.zip>

gemäss den obigen Anweisungen generiert.