Lösung Serie 10

Aufgabe 1 ist online auf https://echo.ethz.ch zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 8. Dezember um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool (link uber https://metaphor.ethz.ch/x/2023/hs/401-0171-00L/).

1. Für die vier Vektoren

$$\mathbf{a}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Matrix $A := (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ gelten welche der folgenden Aussagen?

(a) $\det(A) = 0$.

(b) Der Rang von A ist 3.

(c) Das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = 0$ hat nicht-triviale Lösungen.

(d) Das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat genau eine Lösung.

(e) Die Lösbarkeit von $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ hängt von der Wahl von $\mathbf{v}$ ab.

(f) Die Matrix A hat eine Inverse.

Lösung: Korrekt sind (a), (c) und (e), da:

✓ (a) $\det(A) = 0$.
Richtig, die erste Zeile von A ist das (-1)-fache der zweiten Zeile von A, da

$$A := (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (-1) \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Addiert man die erste zur zweiten Zeile (eine Operation die die Determinante unverändert lässt), so erhält man eine Matrix mit einer Nullzeile und somit ist

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 0.$$

(b) Der Rang von A ist 3.
Falsch, für eine 3×3*-Matrix gilt Rang*$(A) = 3 \iff \det(A) \neq 0$.
Alternativ kann man auch argumentieren, dass beim Gauss'schen Eliminationsverfahren gleich im ersten Schritt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \overset{2.Z=2.Z+1.Z}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

wie oben gezeigt, eine Nullzeile entsteht und daher der Rang nicht maximal (also $= 3$*) sein kann.*

✓ (c) Das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = 0$ hat nicht-triviale Lösungen.
Richtig, alle Vielfachen $\lambda\mathbf{x}$ *von*

$$\mathbf{x} = (3, -2, 1)^T = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind Nulllösungen, da

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2-1 \\ -3+2+1 \\ 0+2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

und

$$A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(A\mathbf{x}) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Alternativ kann man auch benutzen, dass $\det(A) = 0$ *äquivalent zu dieser Aussage ist. Die obige Lösung* $\mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ *findet man wie folgt: Es muss gelten*

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hier setzt man nun $x_3 := 1$ *und daraus folgt sofort* $x_2 = -2$, $x_1 = 3$.

(d) Das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat genau eine Lösung.
Falsch, dies wäre gleichbedeutend mit $\det(A) \neq 0$ *(*$\Longleftrightarrow$ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *ist für beliebige* $\mathbf{b}$ *eindeutig lösbar). Da* $\det(A) = 0$ *gilt, hat das Gleichungssystem entweder keine oder unendlich viele Lösungen, aber nie genau eine.*
Für das gegebene $\mathbf{b}$ *existieren unendlich viele Lösungen, da*

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \; (*)$$

die Lösungen

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda + 3 \\ -2\lambda - 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \textit{für alle } \lambda \in \mathbb{R}$$

hat. Dabei haben wir in $(*)$ *zuerst* $x_3 := \lambda$ *gesetzt und dann nach* $x_2 = -2\lambda - 1$ *und* $x_1 = 3\lambda + 3$ *aufgelöst.*

✓ (e) Die Lösbarkeit von $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ hängt von der Wahl von $\mathbf{v}$ ab.
Richtig. Da die Matrix A *den Rang 2 hat, bildet die Menge der Vektoren* $\mathbf{v}$*, für die eine Lösung existert – und dann gleich unendlich viele Lösungen –, eine Ebene im* $\mathbb{R}^3$*. Für alle* $\mathbf{v}$*, die nicht in dieser Ebene liegen – zumindest optisch sind das die meisten –, existiert keine Lösung.*

(f) Die Matrix A hat eine Inverse.
Falsch, da $\det(A) = 0$ *impliziert, dass die Inverse* A^{-1} *nicht existiert.*
Diese Aussage (f) ist äquivalent zu (b) und zu (d) und somit falsch.

Siehe auch Abschnitt 3.4, Determinanten und lineare Gleichungssysteme, in "K. Nipp / D. Stoffer, Lineare Algebra, 5. Auflage 2002".
Wichtig: Hier wie dort gelten die Aussagen nur für quadratische Matrizen.

2. [Prüfungsaufgabe, Frühling 2007] Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & b & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 7 & -1 & c \\ 5 & 1 & d & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\det(A)$.

(b) Für welche Werte der Parameter a, b, c, d ist die Matrix A singulär?

Lösung:

(a) **Erste Variante mit Laplace'schem Entwicklungssatz:**
Es gilt

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \det\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & b & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 7 & -1 & c \\ 5 & 1 & d & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&\overset{E\,1.Z}{=} (-1)^{1+1} \cdot a \cdot \det\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 7 & -1 & c \\ 1 & d & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&\overset{E\,1.Z}{=} a \cdot \left[(-1)^{1+1} \cdot (-2) \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & c \\ d & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \det\begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & c \\ 1 & d & 1 & 2 \end{pmatrix}\right] \\
&= a \cdot \left[(-2) \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & c \\ d & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & c \\ 1 & d & 1 & 2 \end{pmatrix}\right] \\
&\underset{E\,1.Z}{\overset{E\,1.Z}{=}} a \cdot \left[(-2) \cdot (-1)^{1+2} \cdot 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & c \\ d & 1 & 2 \end{pmatrix} - (-1)^{1+1} \cdot b \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & c \\ d & 1 & 2 \end{pmatrix}\right] \\
&= a \cdot \left[6 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & c \\ d & 1 & 2 \end{pmatrix} - b \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & c \\ d & 1 & 2 \end{pmatrix}\right] \\
&\underset{E\,1.Z}{\overset{E\,1.Z}{=}} a \cdot \left[6 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & c \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - b \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & c \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right] \\
&= a \cdot \left[6 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & c \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - b \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & c \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right] \\
&= a \cdot [6 \cdot ((-1) \cdot 2 - c \cdot 1) - b \cdot ((-1) \cdot 2 - c \cdot 1)] \\
&= a \cdot [6 \cdot (-2 - c) - b \cdot (-2 - c)] \\
&= a \cdot (-2 - c) \cdot [6 - b] \\
&= -a \cdot (2 + c) \cdot (6 - b) \\
&= -a \cdot (c + 2) \cdot (6 - b) \\
&= a \cdot (c + 2) \cdot (b - 6),
\end{aligned}
$$

wobei E für Expansion nach der gegebenen Zeile Z steht.

Zweite und Dritte Variante:

Wir betrachten im Folgenden

$$A^T = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & b & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{pmatrix}$$

anstelle von A, da $\det(A) = \det(A^T)$ und $\det(A^T)$ hier einfacher zu berechnen ist.

Zweite Variante mit Determinantenformel für Blockmatrizen:

Aus "K. Nipp / D. Stoffer, Lineare Algebra, 5. Auflage 2002", Lemma 3.7 oder der Vorlesungswoche 9 wissen wir, dass für quadratische Blockmatrizen M der Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

wobei die Matrizen A und B ebenfalls quadratische Matrizen sind, gilt:

$$\det(M) = \det(A) \cdot \det(C). \; (*)$$

Dies kann man natürlich auch rekursiv anwenden. Zerlege die Matrix

$$A^T = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & b & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

wobei $a = a \in \mathbb{R}^{1\times 1}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad 0 = 0_{5\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$C = \begin{pmatrix} -2 & b & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & E \\ 0 & F \end{pmatrix},$$

mit wiederum (rekursiv)

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & d \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad 0 = 0_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sowie

$$D = \begin{pmatrix} -2 & b & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ c & 2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det(A^T) \\
&= \det \begin{pmatrix} a & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \\
&\overset{(*)}{=} a \cdot \det(C) \\
&= a \cdot \det \begin{pmatrix} D & E \\ 0 & F \end{pmatrix} \\
&\overset{(*)}{=} a \cdot \det(D) \cdot \det(F) \\
&= a \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & b & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ c & 2 \end{pmatrix} \\
&\overset{E\,2.Z}{=} a \cdot (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & b \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ c & 2 \end{pmatrix} \\
&= a \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & b \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ c & 2 \end{pmatrix} \\
&= a \cdot (-1) \cdot ((-2) \cdot 3 - b \cdot (-1)) \cdot ((-1) \cdot 2 - 1 \cdot c) \\
&= a \cdot (-1) \cdot (-6 - (-b)) \cdot (-2 - c) \\
&= a \cdot (-1) \cdot (-6 + b) \cdot (-2 - c) \\
&= a \cdot (-1) \cdot (b - 6) \cdot (-2 - c) \\
&= a \cdot (-1) \cdot (b - 6) \cdot (-1) \cdot (2 + c) \\
&= a \cdot (b - 6) \cdot (2 + c) \\
&= a \cdot (b - 6) \cdot (c + 2).
\end{aligned}$$

Dritte Variante mit dem Gauss-Verfahren:

Es gilt

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det(A^T)\\
&= \det\begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5\\ 0 & -2 & b & 7 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d\\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{pmatrix}\\
&\overset{2.Z\leftrightarrow 4.Z}{=} (-1)\cdot\det\begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5\\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d\\ 0 & -2 & b & 7 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{pmatrix}\\
&\overset{4.Z-2\times(2.Z)}{=} (-1)\cdot\det\begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5\\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d\\ 0 & 0 & b-6 & 11 & -10 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{pmatrix}\\
&\overset{3.Z\leftrightarrow 4.Z}{=} (-1)\cdot(-1)\cdot\det\begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5\\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4\\ 0 & 0 & b-6 & 11 & -10 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{pmatrix}\\
&\overset{6.Z+c\times(5.Z)}{=} (-1)^2\cdot\det\begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5\\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4\\ 0 & 0 & b-6 & 11 & -10 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+c \end{pmatrix}\\
&= \det\begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5\\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4\\ 0 & 0 & b-6 & 11 & -10 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c+2 \end{pmatrix}\\
&= a\cdot(-1)\cdot(b-6)\cdot 1\cdot(-1)\cdot(c+2) = a\cdot(-1)\cdot(b-6)\cdot(-1)\cdot(c+2)\\
&= a\cdot(b-6)\cdot(c+2),
\end{aligned}$$

wie erwartet.

In der obigen Rechnung, haben wir auch verwendet, dass die Determinante einer Dreiecksmatrix gleich dem Produkt ihrer Diagonaleinträge ist (Vorlesungswoche 9), also

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * & * \\ 0 & 0 & a_{33} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & a_{33} & 0 & 0 \\ * & * & * & \ddots & 0 \\ * & * & * & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}$$

und, dass die Determinante das Vorzeichen wechselt, wenn wir in ihrem Argument (der Matrix) zwei Zeilen miteinander vertauschen (Vorlesungswoche 8), daher die Multiplikationen mit dem Faktor (-1).

(b) Die Matrix A ist singulär, genau dann wenn $\det(A) = 0$ gilt, also wenn $a = 0$ oder $b = 6$ oder $c = -2$, weil

$$\det(A) = a \cdot (b - 6) \cdot (c + 2) = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \;\text{ oder }\; b = 6 \;\text{ oder }\; c = -2.$$

3. *Cramer'sche Regel, 1750*

Sei A eine reguläre $n \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ ein Spaltenvektor. Ersetzt man die k-te Spalte von A durch b, erhält man eine Matrix A_k. Beweisen Sie, dass die Lösung von $Ax = b$ durch

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

gegeben ist.

Bemerkung: Bezüglich des Rechenaufwandes ist die Cramer'sche Regel eine im Vergleich zum Gaussverfahren ineffiziente Methode zur Lösung linearer Gleichungssysteme.

Lösung: Wenn wir die i-te Spalte von A mit $a^{(i)}$ bezeichnen, können wir mit

$$A = \begin{pmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} & \dots & a^{(n)} \end{pmatrix} = \left(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}\right)$$

die Gleichung

$$b = Ax = \left(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(a^{(1)} \cdot x_1 + a^{(2)} \cdot x_2 + \dots + a^{(n)} \cdot x_n\right)$$

als

$$b = x_1 \cdot a^{(1)} + x_2 \cdot a^{(2)} + \ldots + x_n \cdot a^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot a^{(i)}$$

umschreiben. Zudem gilt für die Rechnung mit Determinanten (Vorlesungswochen 8 und 9), dass

$$\begin{aligned}
&\det\left(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k-1)}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot a^{(i)}, a^{(k+1)}, \ldots, a^{(n)}\right) \\
&= \lambda_n \cdot \det\left(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k-1)}, a^{(n)}, a^{(k+1)}, \ldots, a^{(n)}\right) \\
&\quad + \det\left(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k-1)}, \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cdot a^{(i)}, a^{(k+1)}, \ldots, a^{(n)}\right) \\
&= \lambda_n \cdot \det\left(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k-1)}, a^{(n)}, a^{(k+1)}, \ldots, a^{(n)}\right) \\
&\quad + \lambda_{n-1} \cdot \det\left(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k-1)}, a^{(n-1)}, a^{(k+1)}, \ldots, a^{(n)}\right) \\
&\quad + \det\left(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k-1)}, \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i \cdot a^{(i)}, a^{(k+1)}, \ldots, a^{(n)}\right) \\
&= \ldots \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \det\left(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k-1)}, a^{(i)}, a^{(k+1)}, \ldots, a^{(n)}\right)
\end{aligned}$$

und, dass die Determinante $\det(M)$ einer Matrix M, welche zwei gleiche Zeilen besitzt, gleich Null ist ($\det(M) = 0$), da die Matrix M nicht invertierbar ist (sie bekommt eine Nullzeile im Gauss-Verfahren).
Folglich gilt mit der Matrix

$$A_k = \left(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k-1)}, b, a^{(k+1)}, \ldots, a^{(n)}\right),$$

dass

$$\begin{aligned}
\det(A_k) &= \det\left(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k-1)}, b, a^{(k+1)}, \ldots, a^{(n)}\right) \\
&= \det\left(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k-1)}, \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot a^{(i)}, a^{(k+1)}, \ldots, a^{(n)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \det\left(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k-1)}, a^{(i)}, a^{(k+1)}, \ldots, a^{(n)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \delta_{ik} \cdot \det(A) \\
&= x_k \cdot \det(A),
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Gleichung

$$\begin{aligned}\det\left(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k-1)}, a^{(i)}, a^{(k+1)}, \ldots, a^{(n)}\right) &= \delta_{ik} \cdot \det(A)\\ &= \begin{cases} \det(A), & \text{falls } i = k;\\ 0, & \text{falls } i \neq k \text{ (zwei gleiche Spalten).}\end{cases}\end{aligned}$$

folgt, welche gilt, da

$$\begin{aligned}\det\left(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k-1)}, a^{(i)}, a^{(k+1)}, \ldots, a^{(n)}\right) &= \det\left(\left(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k-1)}, a^{(i)}, a^{(k+1)}, \ldots, a^{(n)}\right)^T\right)\\ &= \det\begin{pmatrix} a^{(1)}\\ a^{(2)}\\ \ldots\\ a^{(k-1)}\\ a^{(i)}\\ a^{(k+1)}\\ \ldots\\ a^{(n)}\end{pmatrix}\\ &= \begin{cases} \det\left(A^T\right), & \text{falls } i = k;\\ 0, & \text{falls } i \neq k \text{ (zwei gleiche Zeilen)}\end{cases}\\ &= \begin{cases} \det(A), & \text{falls } i = k;\\ 0, & \text{falls } i \neq k\end{cases}\\ &= \delta_{ik} \cdot \det(A).\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = k;\\ 0, & \text{falls } i \neq k\end{cases}$$

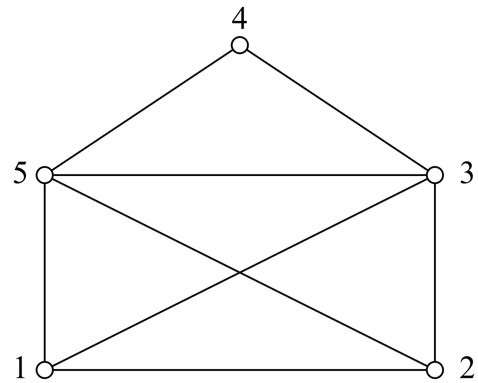
das Kronecker-Delta Symbol (Serie 4).
Nun gilt

$$\det(A_k) = x_k \cdot \det(A) \Longleftrightarrow x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

und somit haben wir die behauptete Formel gezeigt.

4. *Adjazenzmatrix und Laplace-Operator eines Graphen*
Ein Graph G mit den Knoten $1, 2, \ldots, n$ wird vollständig durch seine Adjazenzmatrix $A^G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beschrieben, wobei der (i, j)-te Eintrag von A^G gegeben ist durch

$$(A^G)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \text{ mit } j \text{ durch eine Kante verbunden ist;}\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$



G

Beispielsweise gehört zum untenstehenden Graph G

die Adjazenzmatrix

$$A^G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei d_i der Grad des Knotens i, d.h. die Anzahl seiner Nachbarn, und

$$D^G = \operatorname{diag}(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n).$$

Dann heisst die Matrix

$$L^G := D^G - A^G$$

Laplace-Operator auf G.

(a) Zeigen Sie für beliebige G, dass $\det(L^G) = 0$ gilt.

(b) Kirchhoff's Matrix-Tree-Theorem besagt, dass jeder Kofaktor von L^G die Anzahl der G aufspannenden Teilbäume ist. Man berechne diese Anzahl für das obige Beispiel.

Lösung:

(a) Nach Definition gilt für den Grad des Knotens i (= die Anzahl Nachbarn des Knotens i) die Formel

$$d_i = \sum_{j=1}^{n} (A^G)_{ij},$$

da sich in der i-ten Zeile der Adjazenzmatrix A^G nur Einseinträge (bei Nachbarn vom Knoten i) und Nulleinträge (bei Nicht-Nachbarn vom Knoten i) befinden. Daher summiert die Formel $d_i = \sum_{j=1}^{n} (A^G)_{ij}$ alle Nachbarn des Knotens i, welche sich in der i-ten

Zeile befinden, auf und zählt somit die Nachbarn des Knotens i oder äquivalent dazu den Grad des Knotens i.
Folglich ist die i-te Zeilensumme von

$$L^G := D^G - A^G$$

für alle Knoten $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ gleich 0, weil

$$\begin{aligned}
i\text{-te Zeilensumme}(L^G) &= i\text{-te Zeilesumme}(D^G - A^G) \\
&= i\text{-te Zeilesumme}(D^G) - i\text{-te Zeilesumme}(A^G) \\
&= i\text{-te Zeilesumme}\left[\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix}\right] - \sum_{j=1}^{n} (A^G)_{ij} \\
&= d_i - d_i \\
&= 0 \quad \text{für alle Knoten } i = 1, 2, 3, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Das heisst

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist eine nicht-triviale Lösung von

$$L^G x = 0,$$

weil

$$L^G \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} (L^G)_{1,j} \\ \sum_{j=1}^{n} (L^G)_{2,j} \\ \sum_{j=1}^{n} (L^G)_{3,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} (L^G)_{n,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{1-te Zeilensumme}(L^G) \\ \text{2-te Zeilensumme}(L^G) \\ \text{3-te Zeilensumme}(L^G) \\ \vdots \\ n\text{-te Zeilensumme}(L^G) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Daraus folgt, dass die Matrix L^G singulär ist und daher $\det(L^G) = 0$ gilt, da

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

ebenfalls eine Lösung von $L^G x = 0$ ist und daher die Lösung von $L^G x = 0$ nicht eindeutig bestimmt ist. Somit ist L^G nicht invertierbar und daher gilt $\det(L^G) = 0$.

(b) Der Graph G ist gegeben durch das folgende (Knoten und Kanten) Schema:

Knoten	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	1
2	1	0	1	0	1
3	1	1	0	1	1
4	0	0	1	0	1
5	1	1	1	1	0

$(*)$

Hierbei bedeutet ein (i, j)-ter Eintrag von 1, dass der Knoten i mit dem Knoten j durch eine Kante verbunden ist und ein (i, j)-ter Eintrag von 0 bedeutet, dass der Knoten i nicht durch eine Kante mit dem Knoten j verbunden ist.
Im gegebenen Graphen G ist ein Knoten nie mit sich selber durch eine Schlaufe (=Kante zu sich selbst) verbunden.
Das obige Schema des Graphen G ist äquivalent zur Adjazenzmatrix A^G vom Graphen G.
Wir haben die Adjazenzmatrix

$$A^G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es gilt mit der Notation

$$(i, j) = \text{Knoten } i \text{ ist mit Knoten } j \text{ verbunden},$$

was aus dem obigen Schema $(*)$ oder der obigen Adjazenzmatrix A^G direkt ablesbar ist und der “Zählfunktion” $|\{\cdot\}|$ der Element einer Menge $\{\cdot\}$, dass

$$\begin{aligned} d_1 &= |\{(1,2),(1,3),(1,5)\}| = 3, \\ d_2 &= |\{(2,1),(2,3),(2,5)\}| = 3, \\ d_3 &= |\{(3,1),(3,2),(3,4),(3,5)\}| = 4, \\ d_4 &= |\{(4,3),(4,5)\}| = 2, \\ d_5 &= |\{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}| = 4, \end{aligned}$$

woraus folgt, dass

$$
\begin{aligned}
D^G &= \operatorname{diag}(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) \\
&= \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

In diesem Fall des Graphen G gilt

$$
\begin{aligned}
L^G &= D^G - A^G \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Nach Kirchhoff's Matrix-Tree-Theorem reicht es, irgendeinen Kofaktor auszurechnen. Um mit einer Untermatrix von

$$
L^G = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}
$$

mit möglichst vielen Nulleinträgen zu arbeiten, wählen wir den $(3,3)$-Kofaktor $\tilde{a}_{33}$ aus, welcher durch streichen der 3. Zeile und 3. Spalte von L^G mit anschliessender Determinantenbildung multipliziert mit der Gewichtung $(-1)^{3+3}$ entsteht (Definition in der Vorlesungswoche 8).

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_{33} &= (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & \cancel{-1} & 0 & -1 \\ -1 & 3 & \cancel{-1} & 0 & -1 \\ \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{4} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \\ 0 & 0 & \cancel{-1} & 2 & -1 \\ -1 & -1 & \cancel{-1} & -1 & 4 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \\
&\overset{1.Z \leftrightarrow 4.Z}{=} (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\overset{(-1)\times(1.Z)}{=} (-1) \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\underset{4.Z - 3\times(1.Z)}{\overset{2.Z + 1.Z}{=}} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & 11 \end{pmatrix} \\
&\overset{4.Z + 2.Z}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \\
&\overset{4.Z + 3.Z}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\
&= 1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \\
&= 40.
\end{aligned}
$$

Folglich hat der Graph G genau 40 aufspannende Bäume.
In der obigen Rechnung haben wir im fünften Schritt benutzt, dass Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor (-1) die Determinante um denselben Faktor (-1) ändert (folgt aus der Vorlesungswoche 8).