Lösung Serie 11

Aufgabe 1 ist online auf https://echo.ethz.ch zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 15. Dezember um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool (link uber https://metaphor.ethz.ch/x/2023/hs/401-0171-00L/).

1. Betrachten Sie die Menge $\mathbb{R}_+^2 := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ der Paare positiver, reeller Zahlen, gegeben als Vektor

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^2 \quad \text{mit} \quad a_1 \in \mathbb{R}_+ := (0, \infty) \text{ und } a_2 \in \mathbb{R}_+ := (0, \infty).$$

Die Addition auf $\mathbb{R}_+^2$ sei folgendermassen definiert:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix}.$$

Im Folgenden betrachten wir drei verschiedene Definitionen der Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. Definition: $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}.$

2. Definition: $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} e^\lambda x_1 \\ e^\lambda x_2 \end{pmatrix}.$

3. Definition: $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1^\lambda \\ x_2^\lambda \end{pmatrix}.$

Welche der folgenden Behauptungen sind korrekt?

Die Menge $\mathbb{R}_+^2$ ist ein Vektorraum mit der oben definierten Addition und Multiplikation mit einem Skalar λ gemäss der ...

(a) 1. Definition.

(b) 2. Definition.

(c) 3. Definition.

Lösung: Korrekt ist nur (c), da:

(a) 1. Definition.
Falsch, da z.B. für $\lambda < 0$ *gilt*

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} \notin \mathbb{R}^2_+,$$

weil $\lambda x_1 < 0$ *und* $\lambda x_2 < 0$ *und daher* $\lambda x_1 \notin \mathbb{R}_+$, $\lambda x_2 \notin \mathbb{R}_+$. *Dies gilt, da* $x_1 > 0$ *und* $x_2 > 0$ *ist.*
Die Vektorraumaxiome fordern jedoch, dass die Skalarmultiplikation mit $\lambda \in \mathbb{R}$ *eine Abbildung von*

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2_+ \textit{ nach } \mathbb{R}^2_+ \quad \textit{mit} \quad \left(\lambda, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$$

sein muss. Dies ist somit nicht erfüllt.

(b) 2. Definition.
Falsch, z.B. ist das Distributivgesetz

$$\begin{aligned} \lambda(x+y) &= \lambda \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \lambda \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda} x_1 y_1 \\ e^{\lambda} x_2 y_2 \end{pmatrix} \\ &\neq \begin{pmatrix} e^{2\lambda} x_1 y_1 \\ e^{2\lambda} x_2 y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda} x_1 e^{\lambda} y_1 \\ e^{\lambda} x_2 e^{\lambda} y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda} x_1 \\ e^{\lambda} x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{\lambda} y_1 \\ e^{\lambda} y_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda x + \lambda y \quad \textit{mit } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+ \textit{ und } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

für $\lambda \neq 0$ *nicht erfüllt, da dann* $e^{\lambda} \neq e^{2\lambda}$ *gilt. In der obigen Berechnung haben wir die oben gegebene spezielle Addition und die Multiplikation der 2. Definition je zweimal verwendet.*
Die Beziehung

$$1 \cdot x = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \textit{mit } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_+$$

ist ebenfalls nicht erfüllt, da

$$1 \cdot x = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^1 x_1 \\ e^1 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e x_1 \\ e x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x.$$

✓ (c) 3. Definition.
Richtig, es werden alle Vektorraumaxiome erfüllt:

(1) Es gilt: $\mathbb{R}_+^2 \neq \emptyset$ *und*

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 &\to \mathbb{R}_+^2 \\ (x, y) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) &\mapsto x + y = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^2 \end{aligned}$$

ist wohldefiniert, da $x_1 y_1 > 0$ *und* $x_2 y_2 > 0$*, wenn* $x_1 > 0$ *und* $x_2 > 0$ *gilt. Ebenfalls gilt*

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2 &\to \mathbb{R}_+^2 \\ (\lambda, x) = \left(\lambda, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) &\mapsto \lambda x = \begin{pmatrix} x_1^\lambda \\ x_2^\lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^2 \end{aligned}$$

und dies ist wohldefiniert für alle $\lambda \in \mathbb{R}$*, da* $x_1^\lambda > 0$ *und* $x_2^\lambda > 0$*, wenn* $x_1 > 0$ *und* $x_2 > 0$ *ist.*

(2) Kommutativgesetz der Addition:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 x_1 \\ y_2 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = y + x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^2.$$

(3) Assoziativgesetz der Addition:

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 y_1 z_1 \\ x_2 y_2 z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 z_1 \\ y_2 z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= x + (y + z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}_+^2. \end{aligned}$$

(4) Der Nullvektor dieser Vektorraumstruktur ist

$$0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

da

$$x + 0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot 1 \\ x_2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^2_+.$$

(5) Das additiv inverse Element "$-x$" zu $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_+$ *ist gegeben durch*

$$-x = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} \\ \frac{1}{x_2} \end{pmatrix},$$

weil

$$x + (-x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} \\ \frac{1}{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot \frac{1}{x_1} \\ x_2 \cdot \frac{1}{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2_+.$$

Das additiv inverse Element $-x = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} \\ \frac{1}{x_2} \end{pmatrix}$ *ist wohldefiniert, da* $x_1 \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ *und* $x_2 \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ *nicht gleich* 0 *sein können.*

(6) 1. Gesetz der Skalarmultiplikation:

$$(\alpha\beta)x = (\alpha\beta) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{\alpha\beta} \\ x_2^{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(x_1^\beta\right)^\alpha \\ \left(x_2^\beta\right)^\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1^\beta \\ x_2^\beta \end{pmatrix} = \alpha \left(\beta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \alpha(\beta x) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \;\; a$$

(7) 2. Gesetz der Skalarmultiplikation:

$$(\alpha + \beta)x = (\alpha + \beta) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{\alpha+\beta} \\ x_2^{\alpha+\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^\alpha x_1^\beta \\ x_2^\alpha x_2^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^\alpha \\ x_2^\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^\beta \\ x_2^\beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha x +$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \;\; \textit{and} \;\; \forall x \in \mathbb{R}^2_+.$$

(8) Distributivgesetz der Addition und Skalarmultiplikation:

$$\begin{aligned}
\lambda(x+y) &= \lambda\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \lambda \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (x_1 y_1)^\lambda \\ (x_2 y_2)^\lambda \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1^\lambda y_1^\lambda \\ x_2^\lambda y_2^\lambda \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1^\lambda \\ x_2^\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1^\lambda \\ y_2^\lambda \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= \lambda x + \lambda y \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \;\; \textit{and} \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}^2_+.
\end{aligned}$$

(9) Skalare Multiplikation mit 1*:*

$$1 \cdot x = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^2_+.$$

2. *Spatprodukt in* $\mathbb{R}^3$

Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ drei Spaltenvektoren. Das *Spatprodukt* $S(a, b, c)$ dieser drei Vektoren a, b, c ist dann definiert als

$$S(a, b, c) := (a \times b) \cdot c.$$

(a) Beweisen Sie, dass $S(a, b, c) = \det(a, b, c)$ gilt.

(b) Beweisen Sie, dass $|S(a, b, c)|$ das Volumen des von a, b und c aufgespannten Parallelepipeds (Spat) ist.

(c) Was sagt das Vorzeichen von $S(a, b, c)$ aus?

Lösung: Es seien die drei Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Es gilt nach Aufgabe 4 in der Serie 5, dass

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

Zudem ist

$$\begin{aligned}
\det(a,b,c) &= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+1} \cdot a_1 \cdot \det \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot b_1 \cdot \det \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot c_1 \cdot \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \\
&= a_1 \cdot (b_2c_3 - c_2b_3) - b_1 \cdot (a_2c_3 - c_2a_3) + c_1 \cdot (a_2b_3 - b_2a_3) \\
&= a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 \\
&= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1,
\end{aligned}$$

nach einer Entwicklung nach der 1. Zeile. Diese Formel sollte man auf seiner Zusammenfassung aufschreiben.
Daher gilt

$$\begin{aligned}
S(a,b,c) &= (a \times b) \cdot c \\
&= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= c_1 \cdot (a_2b_3 - a_3b_2) + c_2 \cdot (a_3b_1 - a_1b_3) + c_3 \cdot (a_1b_2 - a_2b_1) \\
&= c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2 + c_2a_3b_1 - c_2a_1b_3 + c_3a_1b_2 - c_3a_2b_1 \\
&= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 \\
&= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\
&= \det(a,b,c).
\end{aligned}$$

(b) Für das Volumen V des von a, b und c aufgespannten Parallelepipeds gilt

$$V = G \cdot h,$$

wobei G die Grundfläche und h die Höhe ist. Nach Serie 5, Aufgabe 4(d) gilt für die Grundfläche G mit Seiten a und b die Formel

$$G = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin(\varphi) = \|a \times b\|,$$

wobei φ der Winkel zwischen den beiden Vektoren a und b ist.
Für die Höhe h gilt

$$h = \|c\| \cdot \cos(\alpha),$$

wobei α der Winkel zwischen c und einem Vektor $\vec{n}$ ist, der senkrecht auf a und b steht, also senkrecht zur Ebene, die von den beiden Vektoren a und b aufgespannt wird. Ausserdem soll $\vec{n}$ auf derselben Seite der Ebene liegen wie der Vektor c, was nur ist, damit h positiv ist. Genau einer der beiden Vekoren $(a \times b)$ oder $-(a \times b)$ ist so ein Vektor $\vec{n}$, unter der Annahme, dass $a \times b \neq 0$. Im Fall $a \times b = 0$ ist die Grundfläche $G = 0$, das Volumen $V = 0$ und $S = 0$ und die Formel also korrekt. Der Winkel zwischen c und $a \times b$ ist entweder α oder $\pi - \alpha$ und es gilt $\cos(\alpha) = -\cos(\pi - \alpha)$. Daher gilt

$$\begin{aligned} V &= G \cdot h \\ &= \|a \times b\| \cdot \|c\| \cdot \cos(\alpha) \\ &= \pm(a \times b) \cdot c \\ &= |S(a, b, c)|, \end{aligned}$$

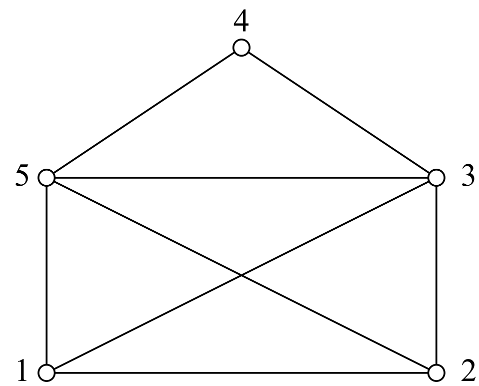
wobei wir die Formel

$$x \cdot y = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\phi)$$

aus Serie 5, Aufgabe 4(d) im Hinweis mit $x := a \times b$, $y := c$ und $\phi := \alpha$ verwendet haben, wobei ϕ der Winkel zwischen x und y ist.

(c) Es gilt $S(a, b, c) > 0$ genau dann, wenn das Tripel (a, b, c) positiv orientiert ist, d.h. genau dann, wenn es die Drei-Finger-Regel (de.wikipedia.org/wiki/Drei-Finger-Regel) erfüllt. Dies gilt, da die drei Vektoren $(a,\ b,\ a \times b)$ die Drei-Finger-Regel bekanntlich erfüllen und $S(a, b, c) = (a \times b) \cdot c > 0$, genau dann, wenn $a \times b$ und c dieselbe Orientierung haben (= auf derselben Seite der von a und b aufgespannten Ebene liegen). Daraus folgt, dass auch das Tripel (a, b, c) die Drei-Finger-Regel ebenfalls erfüllt.

3. Wir interpretieren den Graphen G



G

aus Serie 10, Aufgabe 4 als elektrisches Netzwerk, wobei jede Kante einem Widerstand von $R_0 = 1\Omega$ entspricht. Berechnen Sie den Widerstand R zwischen den Knoten 1 und 5 mit Hilfe der Formel

$$R = R_0 \frac{\tau_{1,5}}{\tau},$$

wobei τ die Anzahl der aufspannenden Bäume von G ist und $\tau_{1,5}$ die Anzahl der aufspannenden Teilbäume, welche die Kante zwischen den Knoten 1 und 5 enthalten. Verwenden Sie dazu die Formel aus Serie 10, Aufgabe 4.

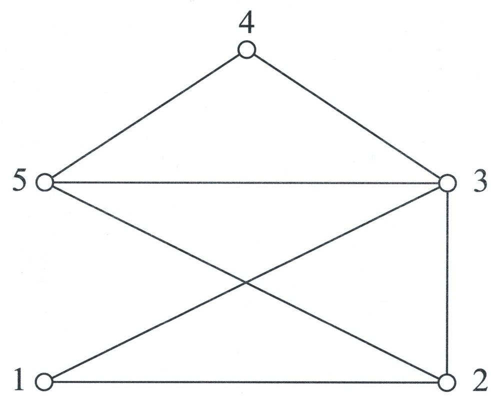
Hinweis: Die Anzahl der aufspannenden Teilbäume, welche die Kante zwischen den Knoten 1 und 5 *nicht* enthalten, ist gleich der Anzahl der aufspannenden Teilbäume des Graphen, den man erhält, wenn man die Kante zwischen den Knoten 1 und 5 löscht.

Lösung: In Serie 10, Aufgabe 4(a) haben wir berechnet, dass für die Anzahl τ der aufspannenden Bäume im Graphen G gilt: $\tau = 40$.
Ausserdem gilt

$$\tau_{1,5} = \tau - \tau'_{1,5},$$

wobei $\tau'_{1,5}$ die Anzahl der aufspannenden Teilbäume des Graphen $G_{1,5}$ ist, den man erhält, wenn man die Kante in G zwischen den Knoten 1 und 5 löscht.

Der Graph $G_{1,5}$ sieht folgendermassen aus:



$G_{1,5}$

Für $G_{1,5}$ hat man die Adjazenzmatrix

$$A^{G_{1,5}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & \cancel{1} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cancel{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A^G \text{ (without cancellations)}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Matrix

$$D^{G_{1,5}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3{\color{blue}-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4{\color{blue}-1} \end{pmatrix}}_{=D^G \text{ (in black)}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

woraus wir den folgenden Laplace-Operator

$$
\begin{aligned}
L^{G_{1,5}} &= D^{G_{1,5}} - A^{G_{1,5}} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

für den Graphen $G_{1,5}$ berechnen.
Durch Berechnen des $(3,3)$-Kofaktors $\widetilde{a'}_{33}$ von L^G erhalten wir mit Kirchhoff's-Matrix-Tree-

Theorem aus Serie 10, Aufgabe 4(a), dass

$$\begin{aligned}
\tau'_{1,5} &= \widetilde{a'}_{33} \\
&= \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cancel{-1} & 0 & 0 \\ -1 & 3 & \cancel{-1} & 0 & -1 \\ \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{4} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \\ 0 & 0 & \cancel{-1} & 2 & -1 \\ 0 & -1 & \cancel{-1} & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&\overset{1.Z \leftrightarrow 2.Z}{=} (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&\overset{(-1)\times(1.Z)}{=} (-1) \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&\overset{2.Z-2\times(1.Z)}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&\overset{E\ 1.S}{=} \det \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} + 0 + 0 + 0 \\
&= 5 \cdot 2 \cdot 3 + 0 + 0 - 5 \cdot (-1) \cdot (-1) - 0 - (-1) \cdot 2 \cdot (-2) \\
&= 30 - 5 - 4 \\
&= 21,
\end{aligned}$$

wobei wir erneut die Formel

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

für die Determinante von 3×3-Matrizen verwendet haben.
Folglich gilt für den Widerstand R zwischen den Knoten 1 und 5, mit der in der Aufgaben-

stellung gegebenen Formel, dass

$$
\begin{aligned}
R &= R_0 \frac{\tau_{1,5}}{\tau} \\
&= R_0 \frac{\tau - \tau'_{1,5}}{\tau} \\
&= \frac{40-21}{40} \Omega \\
&= \frac{19}{40} \Omega.
\end{aligned}
$$

4. *Vandermonde-Determinante*

(a) Für die Vandermonde-Determinante gilt die Formel

$$
\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).
$$

Verifizieren Sie diese Formel für den Fall $n = 3$.

(b) Für die Fläche $F_{\Delta(a,b,c)}$ eines ebenen Dreiecks $\Delta(a, b, c)$ mit den Seiten a, b, c gilt bekanntlich die Flächenformel von Heron

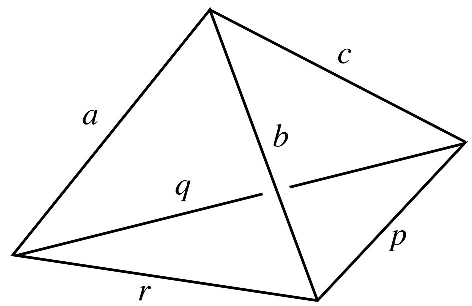
$$
F_{\Delta(a,b,c)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},
$$

wobei $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ der halbe Umfang des Dreiecks $\Delta(a, b, c)$ ist. Man kann zeigen, dass die Formel

$$
F^2_{\Delta(a,b,c)} = -\frac{1}{16} \det \begin{pmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

denselben Wert für $F_{\Delta(a,b,c)}$ ergibt.

Für das Volumen $V_{\Delta(a,b,c,p,q,r)}$ eines Tetraeders $\Delta(a,b,c,p,q,r)$ mit den Kantenlängen a, b, c, p, q, r



$\Delta(a,b,c,p,q,r)$

gilt eine ähnliche Formel, nämlich

$$V^2_{\Delta(a,b,c,p,q,r)} = \frac{1}{2^5 3^2} \det \begin{pmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 & 1 \\ a^2 & 0 & r^2 & q^2 & 1 \\ b^2 & r^2 & 0 & p^2 & 1 \\ c^2 & q^2 & p^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welchen Inhalt $V_{\Delta(a,b,c,p,q,r)}$ hat das Tetraeder $\Delta(a,b,c,p,q,r)$ mit den Kantenlängen $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $p = 4$, $q = 3$ und $r = 2$?

Lösung:

(a) Man zeigt im Fall $n = 3$ z.B. mit der Regel von Sarrus (de.wikipedia.org/wiki/Regel_von_Sarrus) oder mit der Determinantenformel für 3×3-Matrizen

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1,$$

mit $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $b_1 = x_1, b_2 = x_2, b_3 = x_3$ und $c_1 = x_1^2, c_2 = x_2^2, c_3 = x_3^2$, dass

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} &= 1 \cdot x_2 \cdot x_3^2 + 1 \cdot x_3 \cdot x_1^2 + 1 \cdot x_1 \cdot x_2^2 - 1 \cdot x_3 \cdot x_2^2 - 1 \cdot x_1 \cdot x_3^2 - 1 \cdot x_2 \cdot x_1^2 \\ &= x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2 + x_1 x_2^2 - x_3 x_2^2 - x_1 x_3^2 - x_2 x_1^2 \\ &= x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2 + x_3 x_1^2 - x_3 x_2^2 - x_1 x_3^2 - x_2 x_1^2. \end{aligned}$$

Dasselbe Ergebnis erhält man auch durch Ausmultiplizieren von

$$\begin{aligned}\prod_{1\le i<j\le 3}(x_j-x_i) &= \prod_{(i,j)=(1,2),(1,3),(2,3)}(x_j-x_i)\\ &= (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)\\ &= (x_2-x_1)(x_3^2-x_3x_2-x_1x_3+x_1x_2)\\ &= x_2x_3^2-x_2x_3x_2-x_2x_1x_3+x_2x_1x_2-x_1x_3^2+x_1x_3x_2+x_1^2x_3-x_1^2x_2\\ &= x_2x_3^2-x_3x_2^2-x_1x_2x_3+x_1x_2^2-x_1x_3^2+x_1x_2x_3+x_3x_1^2-x_2x_1^2\\ &= x_2x_3^2+x_1x_2^2+x_3x_1^2-x_3x_2^2-x_1x_3^2-x_2x_1^2,\end{aligned}$$

da $(i,j)=(1,2),(1,3),(2,3)$ die einzigen Paare sind, die die drei gegebenen Ungleichungen $1\le i<j\le 3$ erfüllen. Die Paare $(i,j)=(1,1),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3)$ erfüllen die Ungleichungen $1\le i<j\le 3$ nicht.
Die obigen Rechnungen beweisen die Formel

$$\det\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2\\ 1 & x_2 & x_2^2\\ 1 & x_3 & x_3^2\end{pmatrix}=\prod_{1\le i<j\le 3}(x_j-x_i)$$

für die Vandermonde-Determinante im Fall $n=3$.

(b) Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 9 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 16 & 1 \\ 9 & 9 & 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
&\overset{1.Z-2.Z}{=} \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 9 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 16 & 1 \\ 9 & 9 & 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\overset{1.S-2.S}{=} \det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 9 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 16 & 1 \\ 0 & 9 & 16 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\overset{E\,1.S}{=} (-1)^{1+1}\cdot(-2)\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 & 1 \\ 4 & 0 & 16 & 1 \\ 9 & 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + (-1)^{2+1}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 16 & 1 \\ 9 & 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (-2)\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 & 1 \\ 4 & 0 & 16 & 1 \\ 9 & 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 16 & 1 \\ 9 & 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\overset{\substack{2.Z-1.Z \\ 3.Z-1.Z}}{=} (-2)\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 & 1 \\ 4 & -4 & 7 & 0 \\ 9 & 12 & -9 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 16 & 1 \\ 9 & 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\overset{\substack{E\,1.S \\ E\,1.Z}}{=} (-1)^{1+4}\cdot(-2)\cdot\det\begin{pmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 9 & 12 & -9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - (-1)^{1+1}\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 16 & 1 \\ 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 2\cdot\det\begin{pmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 9 & 12 & -9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & 16 & 1 \\ 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 2(4\cdot 12\cdot 1 + 9\cdot 1\cdot 7 + 1\cdot(-4)\cdot(-9) - 4\cdot 1\cdot(-9) - 9\cdot(-4)\cdot 1 - 1\cdot 12\cdot 7) \\
&\quad - (0 + 16\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 16\cdot 1 - 0 - 0 - 0) \\
&= 2(48 + 63 + 36 + 36 + 36 - 84) - (16 + 16) \\
&= 2\cdot 135 - 32 \\
&= 270 - 32 \\
&= 238,
\end{aligned}
$$

wobei Z für Zeile, S für Spalte und E für Entwicklung nach einer Zeile Z oder Spalte S steht.
In der obigen Rechnung haben wir die Formel

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

für die Determinante von 3×3-Matrizen verwendet.

Dann gilt mit $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $p = 4$, $q = 3$ und $r = 2$, dass

$$\begin{aligned}
V_{\Delta(1,2,3,4,3,2)} &= \sqrt{\frac{1}{2^5 3^2} \det \begin{pmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 & 1 \\ a^2 & 0 & r^2 & q^2 & 1 \\ b^2 & r^2 & 0 & p^2 & 1 \\ c^2 & q^2 & p^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Bigg|_{a=1,b=2,c=3,p=4,q=3,r=2}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2^5 3^2} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 9 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 16 & 1 \\ 9 & 9 & 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2^5 3^2} \cdot 238} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2^5 3^2} \cdot 2 \cdot 119} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2^4 3^2} \cdot 119} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2^4 3^2}} \sqrt{119} \\
&= \frac{1}{2^2 \cdot 3} \sqrt{119} \\
&= \frac{1}{12} \sqrt{119}.
\end{aligned}$$

Bemerkung:
Man berechnet, dass

$$
\begin{aligned}
F_{\Delta(a,b,c)} &= \sqrt{-\frac{1}{16}\det\begin{pmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \\
&= \sqrt{\left(-\frac{1}{16}\right)\cdot(-(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c))} \\
&= \sqrt{\frac{1}{16}(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}(a+b+c)\frac{1}{2}(b+c-a)\frac{1}{2}(a+c-b)\frac{1}{2}(a+b-c)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}(a+b+c)\left(\frac{1}{2}(a+b+c)-a\right)\left(\frac{1}{2}(a+b+c)-b\right)\left(\frac{1}{2}(a+b+c)-c\right)} \\
&= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{mit } s=\frac{1}{2}(a+b+c),
\end{aligned}
$$

was die gegebene Formel für $F_{\Delta(a,b,c)}$ in der Aufgabenstellung beweist, da das Resultat für die Fläche von $\Delta(a,b,c)$ mit der Heron'schen Flächenformel übereinstimmt.

In der obigen Rechnung haben wir verwendet, dass

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
&\overset{E\,1.Z}{=} 0 + (-1)^{1+2}\cdot a^2 \cdot \det\begin{pmatrix} a^2 & c^2 & 1 \\ b^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot b^2 \cdot \det\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 1 \\ b^2 & c^2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + (-1)^{1+4}\cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} a^2 & 0 & c^2 \\ b^2 & c^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -a^2 \cdot \det\begin{pmatrix} a^2 & c^2 & 1 \\ b^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + b^2 \cdot \det\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 1 \\ b^2 & c^2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} a^2 & 0 & c^2 \\ b^2 & c^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -a^2 \cdot (0 + b^2\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot c^2 \cdot 1 - a^2\cdot 1\cdot 1 - 0 - 0) \\
&\quad + b^2 \cdot (0 + b^2 \cdot 1 \cdot 1 + 0 - a^2 \cdot 1 \cdot 1 - 0 - 1 \cdot c^2 \cdot 1) \\
&\quad - (a^2 \cdot c^2 \cdot 1 + b^2 \cdot 1 \cdot c^2 + 0 - 0 - 0 - 1 \cdot c^2 \cdot c^2) \\
&= -a^2 \cdot (b^2 + c^2 - a^2) + b^2 \cdot (b^2 - a^2 - c^2) - (a^2c^2 + b^2c^2 - c^4) \\
&= -a^2b^2 - a^2c^2 + a^4 + b^4 - b^2a^2 - b^2c^2 - a^2c^2 - b^2c^2 + c^4 \\
&= a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 \\
&= a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - 4b^2c^2 \\
&= (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2 \\
&= (a^2 - b^2 - c^2)^2 + 2bc\cdot(a^2 - b^2 - c^2) - 2bc\cdot(a^2 - b^2 - c^2) - 4b^2c^2 \\
&= (a^2 - b^2 - c^2)\cdot(a^2 - b^2 - c^2) + (a^2 - b^2 - c^2)\cdot 2bc - 2bc\cdot(a^2 - b^2 - c^2) - 2bc\cdot 2bc \\
&= (a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)\cdot(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) \\
&= -(-a^2 + b^2 + 2bc + c^2)\cdot(a^2 - c^2 - b^2 + 2bc) \\
&= -(ab + ac - a^2 + b^2 + bc - ab + bc + c^2 - ac)\cdot(a^2 + ab - ac + ac + bc - c^2 - ab - b^2 + bc) \\
&= -(ab + ac - a^2 + b^2 + bc - ba + cb + c^2 - ca)\cdot(a^2 + ab - ac + ca + cb - c^2 - ba - b^2 + bc) \\
&= -(a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c),
\end{aligned}
$$

wobei wir erneut die Formel

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

für die Determinante von 3×3-Matrizen und die Trinomische Formel

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

mit $x := a^2$, $y := -b^2$ und $z := -c^2$ in der Berechnung verwendet haben.