Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

- Die Polynome $p_1(t) = 1, p_2(t) = 1 + t, p_3(t) = 1 - t^2$ sind linear unabhängig, denn aus $x_1 p_1(t) + x_2 p_2(t) + x_3 p_3(t) \equiv 0$ folgt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
- Die Polynome $p_1(t) = 1, p_2(t) = 1 + t, p_3(t) = 1 - t$ sind linear abhängig, denn $2p_1(t) - p_2(t) - p_3(t) \equiv 0$.

Basen

Definition

Sei $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem eines Vektorraums V. Falls die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, heisst die Menge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine **Basis** von V.

Lemma

Sei V ein VR. $v_1, \ldots, v_k$ seien linear unabhängige Vektoren in V und $w_1, \ldots, w_n$ sei ein Erzeugendensystem von V. Dann gilt $k \leq n$.

Daraus folgt sofort:

Satz

Sind $\{v_1, \ldots, v_k\}$ und $\{w_1, \ldots, w_n\}$ Basen eines VR V, so gilt $k = n$.

Definition

- Sei $V \neq \{0\}$ ein VR mit Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Dann heisst n **Dimension** von V und wird mit $\dim V$ bezeichnet.
- Man setzt $\dim\{0\} := 0$.
- Ist V unendlichdimensional so schreibt man $\dim V = \infty$.

Beispiel

- $\{e^{(i)} : 1 \leq i \leq n\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^n$ und somit $\dim \mathbb{R}^n = n$. Diese Basis heisst **Standardbasis** von $\mathbb{R}^n$.
- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis der symmetrischen 2×2-Matrizen.

Satz

Sei V ein n-dimensionaler VR. Dann gilt:

- Mehr als n Vektoren in V sind linear abhängig.
- Weniger als n Vektoren in V sind nicht erzeugend.
- n Vektoren in V sind linear unabhängig genau dann, wenn sie erzeugend sind, und genau dann bilden sie eine Basis von V.

Beispiel: $V = \mathbb{R}^n$.
Seien $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$, $A = (a_1 \ldots a_k) \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $r = \text{Rang}\, A$.
Dann gilt folgende Übersicht:

$a_1, \ldots, a_k$ ist erzeugend	$Ax = b$ ist für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ lösbar	$r = n$
$a_1, \ldots, a_k$ ist linear unabhängig	$Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung	$r = k$
$a_1, \ldots, a_k$ ist linear abhängig	$Ax = 0$ hat nichttriviale Lösungen	$r < k$
$a_1, \ldots, a_k$ ist eine Basis	$n = k = r$	$\det A \neq 0$

Beispiel für $V = \mathbb{R}^n$

Seien $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$. Man wähle darunter eine maximale Anzahl linear unabhängige Vektoren aus.

Lösung: Die Matrix $A = (a_1 \ldots a_k) \in \mathbb{R}^{n \times k}$ wird durch das Gauss-Verfahren auf Zeilenstufenform gebracht. Am Endschema $R = (r_1 \ldots r_k)$ wird der Rang ρ abgelesen und die Pivotspalten $r_{i_1}, \ldots, r_{i_\rho}$. Dann sind $a_{i_1}, \ldots, a_{i_\rho}$ linear unabhängig und mehr als ρ Vektoren sind linear abhängig.

Merksatz

Rang A ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten von A und auch die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen von A.

Koordinaten

Definition

Sei V ein reller endlichdimensionaler VR mit Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Dann kann jeder Vektor $x \in V$ in eindeutiger Weise als Linearkombination

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$$

dargestellt werden. Die Koeffizienten $x_1, \ldots, x_n$ heissen **Koordinaten** von x bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Beispiel

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Man bestimme die Koordinaten des Vektors $x = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$ bezüglich $\mathcal{B}$.

Lösung: Das LGS

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

hat die eindeutige Lösung $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

Man nennt $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ den **Koordinatenvektor** von x bezüglich der Basis $\mathcal{B}$. $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$ ist also der Koordinatenvektor von x bezüglich der Standardbasis $\{e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}\}$.

Merke:

Die Koordinaten eines Vektors hängen von der gewählten Basis ab.