

Der Gauss-Algorithmus für die erweiterte Matrix

Beschreibung des Gauss-Algorithmus

- 1 Bestimme die am weitesten links stehende Spalte, die von Null verschiedene Elemente enthält.
- 2 Ist die oberste Zahl in der in Schritt 1 gefundenen Spalte Null, so vertausche man die erste Zeile mit einer andern, wo keine Null steht (Pivot).
- 3 Addiere ein passendes Vielfaches der obersten Zeile zu den übrigen Zeilen, um unterhalb des Pivots Nullen zu erzeugen.
- 4 Wende Schritt 1 bis 3 auf die Untermatrix an, die durch Streichen der ersten Zeile entsteht, und zwar solange, bis es nicht mehr geht. Dann ist die **Zeilenstufenform** erreicht.
- 5 Bestimme die Lösungsmenge durch Rückwärtseinsetzen.

Zeilenstufenform

x_1	x_2	\dots	x_i	x_j	\dots	x_n	1
\circledast	*	\dots				*	c_1
0	0	\dots	0	\circledast	*	*	c_2
\vdots				\ddots		\vdots	\vdots
0	\dots			0	\circledast	*	c_r
0	\dots			0		0	c_{r+1}
\vdots				\vdots		\vdots	\vdots
0	\dots			0		0	c_m

- \circledast Pivots
- Rot: Pivot-Variable
- Blau: freie Parameter
- Grün: Verträglichkeitsbedingungen $c_{r+1} = \dots = c_m = 0$

Zeilenstufenform

x_1	x_2	\dots	x_i	x_j	\dots	x_n	1
\circledast	*	\dots				*	C_1
0	0	\dots	0	\circledast	*	*	C_2
\vdots				\ddots		\vdots	\vdots
0		\dots		0	\circledast	*	C_r
0		\dots			0	\dots	C_{r+1}
\vdots					\vdots	\vdots	\vdots
0		\dots			0	\dots	C_m

Definition

Die Zahl r heisst **Rang** des LGS.

- ▶ $0 \leq r = \text{Anzahl Pivotvariablen} \leq \min\{m, n\}$
- ▶ $n - r = \text{Anzahl freie Parameter}$

Satz 1.1

Ein LGS hat mindestens eine Lösung genau dann, wenn

- ▶ entweder $r = m$ (keine Nullzeilen)
- ▶ oder $r < m$ und $c_{r+1} = \dots = c_m = 0$
(Verträglichkeitsbedingungen erfüllt)

In beiden Fällen liefert Rückwärtseinsetzen die Lösungsmenge.

Satz 1.2

Falls ein LGS eine Lösung besitzt, so ist diese eindeutig genau dann, wenn $r = n$ gilt.

Definition

Ein LGS $Ax = b$ heisst **homogen**, wenn $b = 0$.

Bemerkungen:

- ▶ Ein homogenes LGS (HLGS) besitzt immer die **triviale Lösung** $x = 0$.
- ▶ Falls bei einem HLGS $n > m$ gilt, so besitzt es nichttriviale Lösungen.

Korollar 1.3

Ein HLGS hat genau dann eine nicht-triviale Lösung, wenn $r < n$ gilt.

Korollar 1.4

Ein LGS $Ax = b$ ist genau dann für alle b lösbar, wenn $r = m$ gilt.

Äquivalente Formulierung:

Korollar 1.5

Ein LGS $Ax = b$ ist genau dann nicht für alle b lösbar, wenn $r < m$ gilt.

Side remark

Die logische **Kontraposition** für Aussagen A und B :

$$A \implies B \text{ ist äquivalent zu } \neg B \implies \neg A$$

Lies 'A impliziert B' ist äquivalent zu 'nicht B impliziert nicht A'.

Also auch

$$A \iff B \text{ ist äquivalent zu } \neg B \iff \neg A$$

Achtung: Aus $A \implies B$ folgt **nicht** $B \implies A$.

Zum Beispiel:

A: Federer hat im zweiten Satz den Fuss gebrochen.

B: Federer hat das Match verloren.

Spezialfall:

Anzahl Gleichungen = Anzahl Unbekannte

Korollar 1.6

Sei $m = n$. Das LGS $Ax = b$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn das LGS für beliebiges b lösbar ist.

Geometrische Interpretation

Sei

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq 0$$

ein Vektor in \mathbb{R}^n .

Eine Gleichung der Form

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = d \quad (*)$$

stellt geometrisch dar:

- ▶ eine Gerade in der Ebene, falls $n = 2$
- ▶ eine Ebene im Raum, falls $n = 3$
- ▶ eine Hyperebene, im allgemeinen

Schnittmenge

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems stellt somit die Schnittmenge der Hyperebenen im LGS dar.

Geometrische Interpretation

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = d \quad (*)$$

Hessesche Normalform

Falls $\|a\| = 1$ heisst $(*)$ **Hessesche Normalform**. Dann ist a ein Einheitsnormalenvektor auf der Hyperebene, und d der orientierte Abstand der Hyperebene vom Ursprung.

Dabei ist $\|a\| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$ die **Länge** (auch **Norm** genannt) des Vektors a .

