2.1. Komplexe Zahlen I

Zeigen Sie, dass für alle komplexen Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

(a) $|zw| = |z||w|$

(b) $\bar{\bar{z}} = z$

(c) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$

Hinweis: *Verwenden Sie für c) die Eigenschaft $|z|^2 = z\overline{z} = \overline{z}z$ für alle komplexen Zahlen z.*

2.2. Komplexe Zahlen II

Bestimmen Sie jeweils eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$, geschrieben in Standartform $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, welche die folgende Identität erfüllt.

(a) $z^2 = -i$

(b) $\bar{z} = \frac{1}{z}$

(c) $z^2 - 2z + 5 = 0$

2.3. Nullstellen

Betrachten Sie das folgende Polynom in $\mathbb{C}$

$$P(z) = z^3 - z^2 + z + a,$$

wobei $a \in \mathbb{C}$ ein Parameter ist. Finden Sie $a \in \mathbb{C}$, sodass $-i$ eine Nullstelle von $P(z)$ ist. Faktorisieren Sie für diese Wahl von a das Polynom $P(z)$, also schreiben Sie

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3),$$

wobei z_1, z_2, z_3 die Nullstellen von $P(z)$ sind.

2.4. Manipulation von Summen und Produkten

Zeigen Sie *ohne* Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

(a)

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0,$$

(b)

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_0}, \qquad \text{(wobei } a_k \neq 0 \text{ für } k = 0, \ldots, n\text{).}$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{1+n},$$

Hinweis: Verwenden Sie die Teilaufgabe (a)

(d)

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right) = 2 - \frac{1}{n+1}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Teilaufgabe (b).