4.1. Zwischenwertsatz 1

Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir nehmen an, es gelte: $f(0) = f(1)$. Beweisen Sie, dass es ein $c \in [0, \frac{1}{2}]$ gibt mit:

$$f\left(c + \tfrac{1}{2}\right) = f(c)$$

Hinweis: *Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf die Funktion* $g : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ *an, mit* $g(x) := f(x + \frac{1}{2}) - f(x)$.

4.2. Zwischenwertsatz 2

Es sei

$$f : [-2,-1] \cup [1,2] \to \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Nehmen Sie an, dass $f(-2) = -1$, $f(2) = 1$. Kann man schliessen, dass ein $x \in [-2,-1] \cup [1,2]$ existiert, sodass $f(x) = 0$? Begründen Sie ihre Antwort.

4.3. Gleichmässige Stetigkeit

Sind die folgenden Funktionen gleichmässig stetig?

(a) $f : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$

(c) $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \log(x)$

(d) $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}$

(e) $f : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$